



Miguel Alexandre Cardador Tareco

Licenciado em Engenharia Civil

Conceitos de viscoelasticidade na modelação da fluência em estruturas mistas aço-betão

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre
em Engenharia Civil - Perfil Estruturas

Orientador: Doutor Rodrigo de Moura Gonçalves
Faculdade de Ciências e Tecnologia
da Universidade Nova de Lisboa

Júri:

Presidente: Doutor Rui A. Lopes Baltazar Micaelo
Arguente: Doutora Zuzana Dimitrovová
Vogal: Doutor Rodrigo de Moura Gonçalves



FACULDADE DE
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Maio de 2014

“Copyright” Miguel Alexandre Cardador Tareco, FCT/UNL e UNL

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade Nova de Lisboa tem o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objetivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.

Resumo

O presente trabalho aborda a teoria da viscoelasticidade linear e a sua implementação computacional, no contexto da modelação dos efeitos diferidos em estruturas mistas aço-betão. São estudados os dois modelos matemáticos principais que permitem modelar os fenómenos viscoelásticos, os modelos generalizados de Maxwell e de Kelvin. São obtidos e analisados os algoritmos incrementais correspondentes e, em particular, é apresentado o método de obtenção dos parâmetros destes modelos que permitem modelar o comportamento do betão. Utilizando o Princípio dos Trabalhos Virtuais, obtêm-se os algoritmos para o cálculo incremental da fluência e relaxação numa coluna mista aço-betão, recorrendo aos dois modelos estudados. Uma vez que se pode considerar que o aço não tem comportamento viscoelástico, são analisados os efeitos da relaxação e da fluência do betão na resposta da estrutura mista e dos dois materiais que a compõem.

Palavras chave:

Viscoelasticidade; Modelo generalizado de Maxwell; Modelo generalizado de Kelvin; Estruturas mistas aço-betão; Fluência; Relaxação;

Abstract

The present work discusses the theory of linear viscoelasticity and its computational implementation, in the context of the modelling of time-dependent effects in steel-concrete composite structures. The main mathematical models that allow modelling viscoelastic phenomena are studied, namely the Maxwell and Kelvin chain models. The corresponding incremental algorithms are obtained and analysed and, in particular, the method for obtaining the parameters for modelling the concrete behaviour is presented. Using the Principle of Virtual Work, the algorithms for calculating the incremental creep and relaxation in a steel-concrete composite column are obtained, using both models. Since it can be assumed that the steel has no viscoelastic behavior, the creep and relaxation effects in the composite structure and in both materials are analysed.

Keywords:

Viscoelasticity; Maxwell chain model; Kelvin chain model; Steel-Concrete Composite structures; Creep; Relaxation;

Índice de Matérias

Copyright	i
Resumo	iii
Abstract	v
Índice de Figuras	xi
Índice de Tabelas	xvii
Lista de abreviaturas, siglas e símbolos	xix
1 Introdução	1
1.1 Considerações gerais	1
1.2 Objetivos	2
1.3 Organização da tese	2
2 Viscoelasticidade linear	3
2.1 Introdução	3
2.2 Noções fundamentais	3
2.2.1 Fluência	4
2.2.2 Relaxação	6
2.3 Modelos clássicos	7
2.3.1 Mola elástica linear	7
2.3.2 Amortecedor viscoso linear	8
2.3.3 Elemento de Maxwell	8
2.3.4 Elemento de Kelvin	13
2.3.5 Modelo sólido linear padrão - formato de Maxwell	17

2.3.6	Modelo sólido linear padrão - formato de Kelvin	22
2.3.7	Modelos generalizados	26
2.3.8	Princípio da correspondência	28
2.4	Lei constitutiva integral	28
2.4.1	Formulação geral do integral hereditário	30
2.5	Aspetos algorítmicos	31
2.5.1	Função de relaxação	31
2.5.2	Função de fluência	32
2.5.3	Algoritmo incremental da modelação pelo modelo generalizado de Maxwell	34
2.5.4	Validação do algoritmo incremental do modelo generalizado de Maxwell - relaxação	35
2.5.5	Validação do algoritmo incremental do modelo generalizado de Maxwell - fluência	41
2.5.6	Algoritmo incremental da modelação pelo modelo generalizado de Kelvin	47
2.5.7	Validação do algoritmo incremental do modelo generalizado de Kelvin - fluência	48
2.5.8	Validação do algoritmo incremental do modelo generalizado de Kelvin - relaxação	54
2.6	Modelação da viscoelasticidade no betão	60
2.6.1	Modelação pelo modelo generalizado de Maxwell	60
2.6.2	Modelação pelo modelo generalizado de Kelvin	63
2.6.3	Aplicação e análise dos algoritmos	63
2.7	Implementação numérica	77
2.7.1	Modelação pelo modelo generalizado de Maxwell	78
2.7.2	Modelação pelo modelo generalizado de Kelvin	79
3	Estado da arte da modelação dos efeitos diferidos do betão em colunas/vigas mistas aço-betão	83
3.1	Introdução	83
3.2	Colunas mistas	83
3.2.1	Comportamento de longo termo do betão	85
3.2.2	Análise e modelação dependente do tempo	87
3.3	Vigas mistas	89
3.3.1	Comportamento de longo prazo do betão	90

3.3.2	Análise e modelação dependente do tempo	92
4	Exemplos de Aplicação	97
4.1	Introdução	97
4.2	Exemplo 1: coluna mista sujeita a esforço axial constante	97
4.2.1	Modelo generalizado de Maxwell	98
4.2.2	Modelo generalizado de Kelvin	101
4.3	Exemplo 2: coluna mista sujeita a deslocamento imposto	105
4.3.1	Modelo generalizado de Maxwell	105
4.3.2	Modelo generalizado de Kelvin	107
4.4	Exemplo 3: Influência do faseamento construtivo	111
5	Conclusões e desenvolvimentos futuros	115
5.1	Observações finais	115
5.2	Conclusões finais	115
5.3	Sugestões para desenvolvimentos futuros	117
	Referências bibliográficas	119
A	Transformadas de Laplace	127
B	Expressões básicas para a determinação do coeficiente de fluência segundo o EC2	129

Índice de Figuras

2.1	a) Representação gráfica da fluência; b) Representação gráfica da relaxação	4
2.2	Deformação por fluência a diferentes tensões constantes	5
2.3	Função de fluência para $J_0 = 1 \times 10^{-5} \text{ MPa}^{-1}$, $J_\infty = 2 \times 10^{-5} \text{ MPa}^{-1}$ e $\lambda_J = 2000 \text{ dias}$	5
2.4	Relaxação de tensões para níveis diferentes de deformações impostas	6
2.5	Função de relaxação para $E_0 = 10 \times 10^4 \text{ MPa}$, $E_\infty = 5 \times 10^4 \text{ MPa}$, e $\lambda = 1000 \text{ dias}$	7
2.6	Mola elástica linear	8
2.7	Amortecedor linear	8
2.8	Resposta do amortecedor à aplicação de uma tensão constante . .	9
2.9	Elemento de Maxwell	9
2.10	Esquema do teste de fluência-descarregamento num elemento de Maxwell	10
2.11	Resposta do elemento de Maxwell a uma tensão constante e descarregamento	11
2.12	Esquema do teste de relaxação num elemento de Maxwell	12
2.13	Resposta do elemento de Maxwell a um teste de relaxação.	13
2.14	Elemento de Kelvin	13
2.15	Esquema do teste de fluência no elemento de Kelvin	14
2.16	Resposta do elemento de Kelvin a uma tensão constante e descarregamento	16
2.17	Histórico de deformação aplicado ao elemento de Kelvin.	16
2.18	Ensaio de relaxação no elemento de Kelvin quando solicitado com o histórico de deformação da figura 2.17.	17
2.19	Modelo sólido linear padrão - formato de Maxwell	18

2.20 Função de relaxação do modelo sólido linear padrão no formato de Maxwell com $E_1 = 50000 \text{ MPa}$, $E_2 = 50000 \text{ MPa}$, e $\lambda = 1000 \text{ dias}$.	20
2.21 Função de fluência do modelo sólido linear padrão no formato de Maxwell com $E_1 = 50000 \text{ MPa}$, $E_2 = 50000 \text{ MPa}$ e $\lambda = 1000 \text{ dias}$.	21
2.22 Modelo sólido linear padrão - formato de Kelvin	22
2.23 Função de fluência do modelo sólido linear padrão no formato de Kelvin com $E_1 = 50000 \text{ MPa}$, $E_2 = 50000 \text{ MPa}$, e $\lambda_J = 1000 \text{ dias}$.	24
2.24 Função de relaxação do modelo sólido linear padrão no formato de Kelvin com $E_1 = 50000 \text{ MPa}$, $E_2 = 50000 \text{ MPa}$, e $\lambda_J = 1000 \text{ dias}$.	25
2.25 Modelos generalizados de Maxwell e Kelvin com elasticidade instantânea [63].	26
2.26 Sobreposição de efeitos	30
2.27 Rotina de implementação do algoritmo incremental para o caso simples de relaxação num sólido linear padrão no formato de Maxwell.	37
2.28 Resposta do sólido linear padrão no formato de Maxwell a um teste de relaxação com passos de cálculo $\Delta t = 10^{0.5 \times i} - 10^{0.5 \times (i-1)} \text{ dias}$.	37
2.29 Resposta do sólido linear padrão no formato de Maxwell a um teste de relaxação com passos de cálculo $\Delta t = 10^{0.5 \times i} - 10^{0.5 \times (i-1)} \text{ dias}$: (a) Evolução da tensão nos componentes; (b) Evolução da deformação nos componentes;	38
2.30 Resposta do sólido linear padrão no formato de Maxwell a um teste de relaxação com passos de cálculo $\Delta t = 10^{0.1 \times i} - 10^{0.1 \times (i-1)} \text{ dias}$.	39
2.31 Resposta do sólido linear padrão no formato de Maxwell a um teste de relaxação com passos de cálculo $\Delta t = 10^{0.1 \times i} - 10^{0.1 \times (i-1)} \text{ dias}$: (a) Evolução da tensão nos componentes; (b) Evolução da deformação nos componentes;	40
2.32 Rotina de implementação do algoritmo incremental para o caso da fluência num sólido linear padrão no formato de Maxwell.	42
2.33 Resposta do sólido linear padrão no formato de Maxwell a um teste de fluência com passos de cálculo $\Delta t = 10^{0.5 \times i} - 10^{0.5 \times (i-1)} \text{ dias}$: (a) Deformação Total; (b) Erro da deformação total.	43
2.34 Resposta do sólido linear padrão no formato de Maxwell a um teste de fluência com passos de cálculo $\Delta t = 10^{0.5 \times i} - 10^{0.5 \times (i-1)} \text{ dias}$: (a) Evolução da deformação nos componentes; (b) Evolução da tensão nos componentes.	44
2.35 Resposta do sólido linear padrão no formato de Maxwell a um teste de fluência com passos de cálculo $\Delta t = 10^{0.1 \times i} - 10^{0.1 \times (i-1)} \text{ dias}$: (a) Deformação Total; (b) Erro da deformação total.	45

2.36 Resposta do sólido linear padrão no formato de Maxwell a um teste de fluência com passos de cálculo $\Delta t = 10^{0.1 \times i} - 10^{0.1 \times (i-1)}$ dias: (a) Evolução da deformação nos componentes; (b) Evolução da tensão nos componentes.	46
2.37 Rotina de implementação do algoritmo incremental para o caso da fluência num sólido linear padrão no formato de Kelvin.	49
2.38 Resposta do sólido linear padrão no formato de Kelvin a um teste de fluência com passos de cálculo $\Delta t = 10^{0.5 \times i} - 10^{0.5 \times (i-1)}$ dias.	50
2.39 Resposta do sólido linear padrão no formato de Kelvin a um teste de fluência com passos de cálculo $\Delta t = 10^{0.5 \times i} - 10^{0.5 \times (i-1)}$ dias: (a) Evolução da deformação nos componentes; (b) Evolução da tensão nos componentes.	51
2.40 Resposta do sólido linear padrão no formato de Kelvin a um teste de fluência com passos de cálculo $\Delta t = 10^{0.1 \times i} - 10^{0.1 \times (i-1)}$ dias.	52
2.41 Resposta do sólido linear padrão no formato de Kelvin a um teste de fluência com passos de cálculo $\Delta t = 10^{0.1 \times i} - 10^{0.1 \times (i-1)}$ dias: (a) Evolução da deformação nos componentes; (b) Evolução da tensão nos componentes.	53
2.42 Rotina de implementação do algoritmo incremental para o caso da fluência num sólido linear padrão no formato de Kelvin.	55
2.43 Resposta do sólido linear padrão no formato de Kelvin a um teste de relaxação com passos de cálculo $\Delta t = 10^{0.5 \times i} - 10^{0.5 \times (i-1)}$ dias: (a) Tensão total; (b) Erro da tensão total.	56
2.44 Resposta do sólido linear padrão no formato de Kelvin a um teste de relaxação com passos de cálculo $\Delta t = 10^{0.5 \times i} - 10^{0.5 \times (i-1)}$ dias: (a) Evolução da tensão nos componentes; (b) Evolução da deformação nos componentes.	57
2.45 Resposta do sólido linear padrão no formato de Kelvin a um teste de relaxação com passos de cálculo $\Delta t = 10^{0.1 \times i} - 10^{0.1 \times (i-1)}$ dias: (a) Tensão total; (b) Erro da tensão total.	58
2.46 Resposta do sólido linear padrão no formato de Kelvin a um teste de relaxação com passos de cálculo $\Delta t = 10^{0.1 \times i} - 10^{0.1 \times (i-1)}$ dias: (a) Evolução da tensão nos componentes; (b) Evolução da deformação nos componentes.	59
2.47 Rotina de implementação da função de fluência recomendada pelo EC2	64
2.48 Curva de fluência recomendada pelo EC2 com $E = 27000 \text{ MPa}$, $h_0 = 150 \text{ mm}$, $RH = 80\%$ e $f_{cm} = 38 \text{ MPa}$	65
2.49 Rotina de implementação do algoritmo de determinação da função de relaxação a partir de dados de fluência	65

2.50 Função de relaxação obtida a partir da função de fluência regulamentar do EC2.	66
2.51 Rotina de implementação dos mínimos quadrados para o ajuste da expansão de Dirichlet do modelo generalizado de Maxwell à curva de relaxação regulamentar.	66
2.52 Rotina de implementação do algoritmo incremental do modelo generalizado de Maxwell para o caso da relaxação em função do número de termos da série de Dirichlet.	68
2.53 Comparação entre a curva obtida a partir do EC2 e a solução obtida através da cadeia de Maxwell com dois conjuntos de parâmetros: (a) Dados da Tab. 2.2; (b) Dados da Tab. 2.3.	69
2.54 Erro cometido no ajuste da expansão de Dirichlet à curva regulamentar: (a) Expansão de Dirichlet com 5 termos; (b) Expansão de Dirichlet com 7 termos.	70
2.55 Evoluções da tensão nos elementos do modelo generalizado de Maxwell durante um ensaio de relaxação: (a) Série de Dirichlet com cinco termos; (b) Série de Dirichlet com sete termos.	71
2.56 Rotina de implementação dos mínimos quadrados para o ajuste da expansão de Dirichlet do modelo generalizado de Kelvin à curva de fluência regulamentar.	72
2.57 Rotina de implementação do algoritmo incremental do modelo generalizado de Kelvin para o caso da fluência em função do número de termos da série de Dirichlet.	74
2.58 Comparação entre a curva regulamentar do EC2 e a solução obtida através do modelo generalizado de Kelvin com dois conjuntos de dados: (a) Parâmetros da Tab. 2.5; (b) Parâmetros da Tab. 2.6. . . .	75
2.59 Erro cometido no ajuste da expansão de Dirichlet à curva regulamentar: (a) Expansão com 5 termos; (b) Expansão com 6 termos.	76
2.60 Carga pontual aplicada na extremidade de uma barra.	77
3.1 Secções típicas de colunas mistas aço-betão [78]	84
3.2 Exemplos dos modos de encurvadura para secções de aço e mistas aço-betão [78]	85
3.3 Exemplo do confinamento do betão num CFT circular [78]	85
3.4 Variação da fluência básica para diferentes classes de resistência do betão [78]	86
3.5 Variação da retração autogénea para diferentes classes de resistência do betão [78]	87
3.6 Vigas mistas típicas [78]	89

3.7	Dispositivos mecânicos típicos usados para transferir a força de corte [78]	90
3.8	Classificação da interação de corte em função do escorregamento [78]	90
3.9	Condições de secagem e distribuição qualitativa da retração numa laje exposta em ambas as faces [78]	91
3.10	Condições de secagem e distribuição qualitativa da retração numa laje exposta apenas numa face [78]	92
4.1	Exemplo 1: coluna mista sujeita a uma força constante Q	97
4.2	Rotina de implementação do algoritmo incremental para o cálculo do deslocamento devido à fluência numa coluna mista com o modelo generalizado de Maxwell.	98
4.3	Exemplo 1: resolução com o modelo generalizado de Maxwell: (a) Deformação total; (b) Evoluções da tensão nos materiais.	100
4.4	Rotina de implementação do algoritmo incremental para o cálculo do deslocamento devido à fluência numa coluna mista com o modelo generalizado de Kelvin	101
4.5	Exemplo 1: resolução com o modelo generalizado de Kelvin: (a) Deformação total; (b) Evoluções da tensão nos materiais.	103
4.6	Exemplo 1: Comparação entre os resultados obtidos com os dois modelos estudados: (a) Deformação total; (b) Evoluções da tensão nos materiais.	104
4.7	Exemplo 2: coluna mista sujeita a um deslocamento imposto.	105
4.8	Rotina de implementação do algoritmo incremental para o cálculo do esforço axial devido à relaxação numa coluna mista com o modelo generalizado de Maxwell.	106
4.9	Exemplo 2: resolução com o modelo generalizado de Maxwell: (a) Esforço axial total; (b) Evoluções da tensão nos materiais.	107
4.10	Rotina de implementação do algoritmo incremental para o cálculo do esforço axial devido à relaxação numa coluna mista com o modelo generalizado de Kelvin.	108
4.11	Exemplo 2: resolução com o modelo generalizado de Kelvin: (a) Esforço axial total; (b) Evoluções da tensão nos materiais.	109
4.12	Exemplo 2: Comparação entre os resultados obtidos com os dois modelos estudados: (a) Tensão total; (b) Evoluções da tensão nos materiais.	110

4.13 Rotina de implementação do algoritmo incremental para o cálculo do deslocamento por fluência devido numa coluna mista com o modelo generalizado de Kelvin devido à aplicação do histórico de tensões da Tab. 4.1.	112
4.14 Exemplo 3: Comparação entre os resultados obtidos com os dois modelos estudados: (a) Deformação total; (b) Evoluções da tensão nos materiais.	113

Índice de Tabelas

2.1	Pontos da função de relaxação da Fig. 2.50, com os quais se ajustou a expansão da série de Dirichlet.	67
2.2	Valores dos módulos de elasticidade da expansão de Dirichlet do modelo generalizado de Maxwell com cinco termos.	67
2.3	Valores dos módulos de elasticidade da expansão de Dirichlet do modelo generalizado de Maxwell com sete termos.	67
2.4	Pontos da função de fluência da Fig. 2.48 aos quais se ajustou a expansão da série de Dirichlet.	73
2.5	Valores dos módulos de elasticidade da expansão de Dirichlet do modelo generalizado de Kelvin com cinco termos.	73
2.6	Valores dos módulos de elasticidade da expansão de Dirichlet do modelo generalizado de Kelvin com seis termos.	73
4.1	Histórico de aplicação de tensões para o cálculo do deslocamento por fluência.	111

Lista de abreviaturas, siglas e símbolos

Abreviaturas

EC2 Eurocodigo 2

EC4 Eurocodigo 4

Siglas

MEF Método dos Elementos Finitos

PTV Principio dos Trabalhos Virtuais

Letras Latinas Maiúsculas

$E(t)$ função de relaxação

E_{∞} valor a tempo infinito da função de relaxação

E_0 valor no instante inicial da função de relaxação

E módulo de elasticidade

E_{α} módulo de elasticidade da mola do elemento α de Maxwell/Kelvin

$H(t)$ função Heaviside

$J(t)$ função de fluência

J_{∞} valor a tempo infinito da função de fluência

J_0 valor no instante inicial da função de fluência

L comprimento de um elemento estrutural

Q força

RH humidade relativa do ar

W_{int} trabalho realizado pelas forças internas de um sistema

W_{ext} trabalho realizado pelas forças externas de um sistema

V volume de um elemento estrutural

Letras Latinas Minúsculas

f_{cm} valor médio da tensão de rotura do betão à compressão

f'_c valor característico da tensão de rotura do betão à compressão

h_0 espessura equivalente de um elemento estrutural

t tempo

u deslocamento axial

Letras Gregas Maiúsculas

Δ variação incremental

Φ função dos mínimos quadrados

Ω área da secção transversal de um elemento estrutural

Letras Gregas Minúsculas

δ variação virtual

$\delta(t)$ função Dirac

ε deformação

$\dot{\varepsilon}$ derivada da deformação em ordem ao tempo

ε_{α}^* variável de estado do elemento de Kelvin α

ε_{α} deformação no elemento de Kelvin α

η coeficiente de viscosidade

η_{α} coeficiente de viscosidade do amortecedor do elemento α de Maxwell/Kelvin

λ tempo de relaxação

λ_{α} tempo de relaxação do elemento de Maxwell α

λ_J tempo de retardação

$\lambda_{J\alpha}$ tempo de retardação do elemento de Kelvin α

σ tensão

$\dot{\sigma}$ derivada da tensão em ordem ao tempo

σ_{α} tensão no elemento de Maxwell α e variável de estado

$\varphi(t)$ coeficiente de fluência

Capítulo 1

Introdução

1.1 Considerações gerais

A utilização de estruturas mistas de aço e betão tem-se vindo a disseminar cada vez mais por todo o mundo em aplicações em edifícios e pontes. A combinação destes dois materiais permite tirar partido das qualidades de ambos. Assim podem-se obter estruturas com elementos de menor dimensão, com menor peso próprio e processos construtivos mais céleres em relação às estruturas convencionais de betão. Consequentemente, é possível ter custos associados de menor grandeza quando comparados com estruturas de aço ou betão [93].

A utilização de sistemas e elementos estruturais progressivamente mais complexos em termos do tipo de materiais utilizados, da forma estrutural e da dimensão, bem como crescentes exigências de garantia de qualidade, impõem o desenvolvimento de métodos numéricos fiáveis e eficazes, capazes de modelar o comportamento das estruturas em todas as fases da sua vida, permitindo uma avaliação mais rigorosa do respetivo grau de segurança.

Neste contexto, é cada vez mais importante o desenvolvimento de modelos computacionais que tenham em consideração as especificidades e a complexidade do comportamento dos diversos materiais, nomeadamente o seu comportamento não-linear.

Um dos métodos mais utilizados para resolver numericamente problemas de análise estrutural não-linear é o Método dos Elementos Finitos (MEF). O MEF oferece a possibilidade de modelar os aspetos fundamentais do comportamento dos materiais que, pela sua complexidade, normalmente são considerados de forma simplificada nas metodologias de projeto tradicionais.

Tal é o caso da viscoelasticidade, propriedade de um material exibir comportamento elástico e viscoso. A viscoelasticidade é normalmente ilustrada recorrendo aos ensaios de fluência e de relaxação. O processo de fluência consiste no aumento da deformação do material ao longo do tempo, após a deformação instantânea, quando este é sujeito a uma tensão constante. A relaxação consiste na diminuição da tensão no material, após a tensão

instantânea, quando este é sujeito a uma deformação constante.

O efeito da fluência do betão em estruturas mistas é de relevante importância. Este efeito tem como consequência a redistribuição de esforços entre o betão e o aço, causando uma redução de tensão no betão e, consequentemente, um aumento da tensão no aço [69, 93]. O efeito da fluência pode ser significativo e deve ser devidamente considerado, para assegurar que não é atingida a tensão de cedência no aço e que não ocorre instabilidade por encurvadura local [69, 93].

1.2 Objetivos

O objetivo principal da presente Dissertação é o estudo e implementação de métodos numéricos que permitam modelar os fenómenos viscoelásticos lineares em estruturas mistas aço-betão. Em particular, pretende-se expor de forma clara e pedagógica a teoria da viscoelasticidade linear e algumas das metodologias mais utilizadas para modelar estruturas mistas aço-betão, para implementação no contexto do MEF. Pretende-se também recolher e agrupar a investigação existente nesta área.

1.3 Organização da tese

A tese encontra organizada em cinco capítulos. O primeiro e presente capítulo é de carácter introdutório.

No segundo capítulo expõe-se a teoria da viscoelasticidade. Aborda-se a fluência e a relaxação, apresentam-se os diferentes modelos elementares e a respetiva formulação matemática, assim como os diferentes algoritmos incrementais desenvolvidos e os métodos de modelação do betão. Finalmente, apresentam-se algoritmos obtidos pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) que permitem o cálculo da resposta de barras com secção mista.

No terceiro capítulo apresentam-se os diversos estudos existentes relativos à modelação dos efeitos diferidos do betão em colunas e vigas mistas aço-betão. Procura-se agrupar as diversas modelações consoante o comportamento da interface entre materiais, o tipo de modelos de efeitos diferidos do betão e o tipo de modelos de cálculo numérico estrutural utilizados para a obtenção da resposta da estrutura mista.

No quarto capítulo põem-se em prática os diversos algoritmos obtidos e analisados no segundo capítulo. Em particular, obtém-se a resposta diferida de uma coluna mista.

Finalmente, no capítulo cinco são tiradas as principais conclusões do trabalho efetuado e sugeridos possíveis desenvolvimentos futuros.

Capítulo 2

Viscoelasticidade linear

2.1 Introdução

O presente capítulo tem como objetivo a apresentação da teoria da viscoelasticidade linear. É feita uma recolha de informação sobre as noções fundamentais e a formulação matemática. São abordados aspetos algorítmicos e a sua implementação no estudo do comportamento do betão.

As secções 2.2 e 2.3, onde se abordam respetivamente as noções fundamentais e a formulação matemática, foram elaboradas com o contributo de diversos documentos académicos de diversas Universidades e de literatura disponível [81, 91, 30, 63]

As secções 2.4 e 2.5 são elaboradas com base no trabalho desenvolvido por L. J. Sluys [86] e por Póvoas [73].

Na secção 2.4 são abordados os aspetos algorítmicos da teoria da viscoelasticidade e é feita uma análise e validação dos algoritmos incrementais apresentados.

Na secção 2.5 aborda-se a modelação da viscoelasticidade no betão e, para um determinado tipo de betão, são obtidos os parâmetros necessários para a implementação dos algoritmos obtidos na secção anterior.

Finalmente, na secção 2.6 apresentam-se os algoritmos incrementais para a aplicação numérica.

2.2 Noções fundamentais

A dependência do tempo de materiais com comportamento viscoelástico manifesta-se fundamentalmente em duas respostas distintas do material: a *fluência* e a *relaxação*.

A fluência corresponde ao aumento da deformação ao longo do tempo quando é imposta uma tensão constante [Fig. 2.1a]. A relaxação é definida pela diminuição

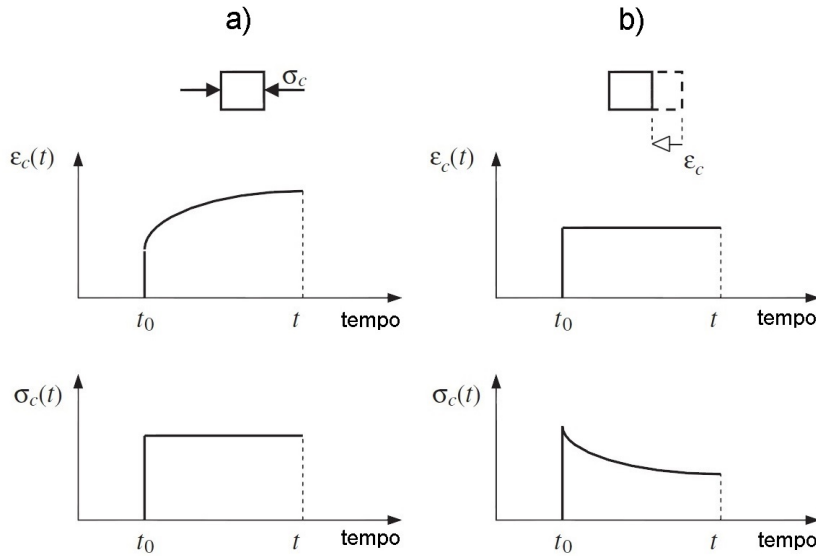


Figura 2.1: a) Representação gráfica da fluência; b) Representação gráfica da relaxação [78]

da tensão ao longo do tempo quando é imposta uma deformação constante [Fig. 2.1b].

Experimentalmente, procura-se caracterizar o comportamento viscoelástico dos materiais através de informação relevante obtida de testes de fluência e relaxação. Estes dois fenômenos são apresentados em detalhe nos subcapítulos seguintes.

2.2.1 Fluência

O teste de fluência consiste na medição da deformação dependente do tempo $\epsilon(t) = u(t)/L$ resultante da aplicação estática de uma tensão uniaxial como ilustrado na Fig. 2.2, em que L é o comprimento inicial do elemento estrutural. As curvas do gráfico foram obtidas a partir da função de fluência (2.56), deduzida a partir do modelo sólido linear padrão no formato de Maxwell apresentado mais à frente. Estas descrevem a deformação no modelo para três níveis diferentes de tensão, cada um com o dobro da magnitude do anterior.

Note-se que na Fig. 2.2, quando a tensão duplica, a deformação resultante duplica ao longo de todo o intervalo de tempo, o que é uma consequência de se estar a considerar materiais lineares.

A relação entre o histórico de deformação e a tensão aplicada é a denominada *função de fluência* J , que dá o valor corrente de deformação

$$J(t) = \frac{\epsilon(t)}{\sigma_0}. \quad (2.1)$$

Uma forma habitual desta função é ilustrada na Fig. 2.3, em que a função

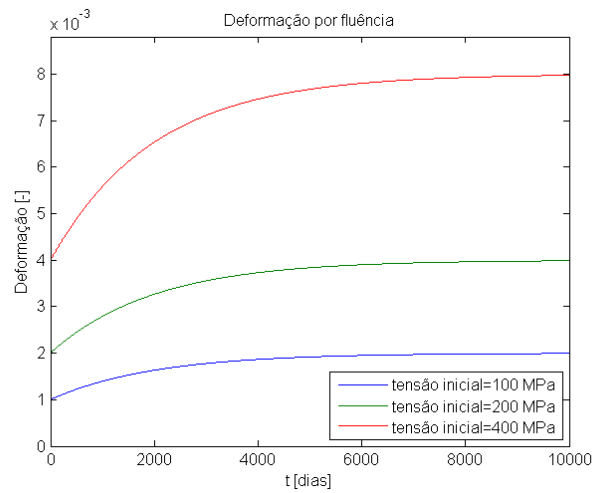


Figura 2.2: Deformação por fluência a diferentes tensões constantes

é representada em função do tempo, em escala logarítmica. Note-se que a escala logarítmica altera a forma da curva, "alongando" a parcela da resposta correspondente ao período inicial e "comprimindo" a região de longo prazo. Imediatamente após o carregamento, o valor $J_0 (= J(0))$ corresponde à deformação elástica do material. Ao longo do tempo, o valor da função de fluência tende para um valor $J_\infty (= J(\infty))$. O valor no eixo das abcissas onde a curva da função de fluência apresenta uma inflexão é designado de *tempo de retardação* do processo de fluência e é representado por λ_J [81].

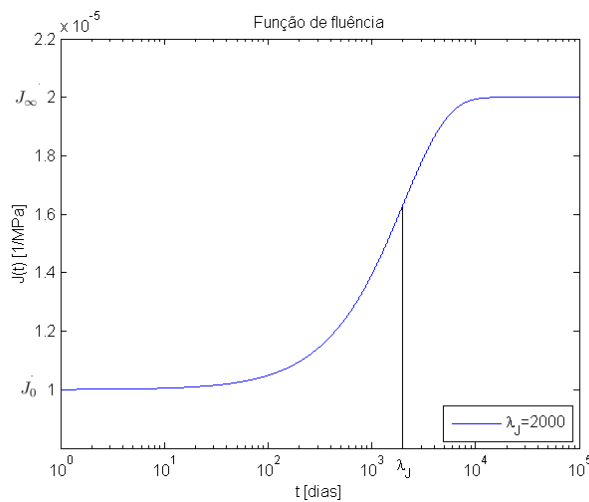


Figura 2.3: Função de fluência para $J_0 = 1 \times 10^{-5} \text{ MPa}^{-1}$, $J_\infty = 2 \times 10^{-5} \text{ MPa}^{-1}$ e $\lambda_J = 2000 \text{ dias}$

2.2.2 Relaxação

O teste de relaxação consiste na medição da tensão dependente do tempo, resultante de uma deformação constante imposta (Fig. 2.4). Na Fig. 2.4, as curvas de tensão correspondem a três níveis diferentes de deformação constante, em que cada um tem o dobro da magnitude do anterior.

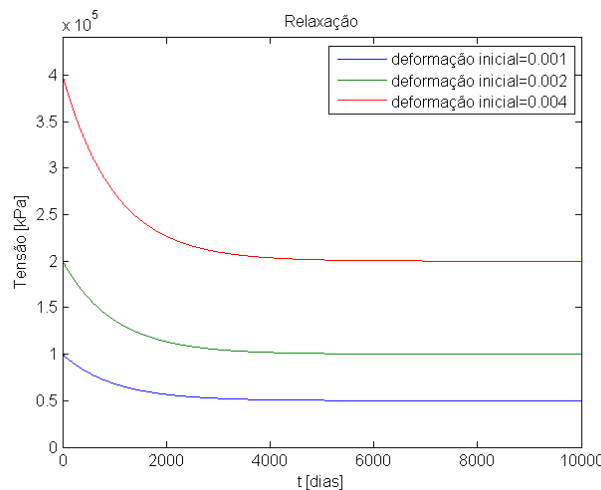


Figura 2.4: Relaxação de tensões para níveis diferentes de deformações impostas

Analogamente à função de fluência, podem sobrepor-se os históricos de tensões normalizando-os em relação às deformações impostas, obtendo-se assim a *função de relaxação*

$$E(t) = \sigma(t) / \varepsilon_0, \quad (2.2)$$

que dá o valor corrente de tensão definida em relação ao tempo (Fig. 2.5). Nos instantes iniciais a tensão está num patamar elevado $E_0 (= E(0))$ que corresponde à resposta elástica e depois diminui exponencialmente para um nível inferior de equilíbrio $E_\infty (= E(\infty))$. O valor no eixo das abcissas onde a curva da função de relaxação apresenta uma inflexão é designado de *tempo de relaxação* do processo de relaxação e é representado por λ [81].

A fluência e a relaxação são ambas manifestações dos mesmos mecanismos moleculares [81], e seria expectável que E e J estivessem relacionados. No entanto, embora $E_0 = 1/J_0$ e $E_\infty = 1/J_\infty$, no geral $E(t) \neq 1/J(t)$. Em particular, a resposta da relaxação move-se mais rápido para o equilíbrio em relação ao que acontece na fluência. Esta afirmação será demonstrada mais à frente no estudo do modelo sólido linear padrão.

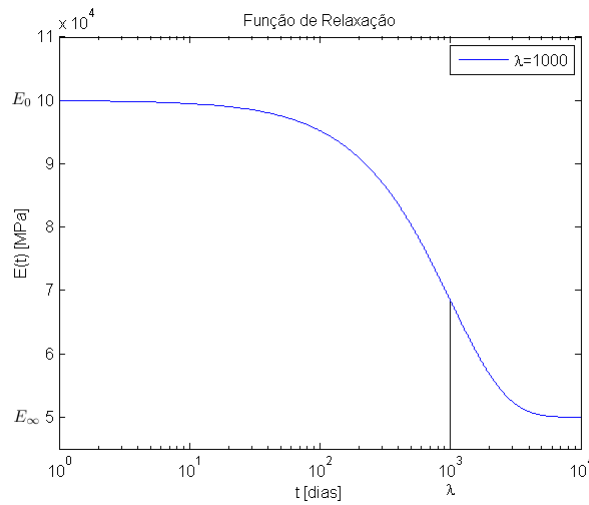


Figura 2.5: Função de relaxação para $E_0 = 10 \times 10^4 \text{ MPa}$, $E_\infty = 5 \times 10^4 \text{ MPa}$, e $\lambda = 1000 \text{ dias}$.

2.3 Modelos clássicos

Os materiais viscoelásticos apresentam comportamento elástico e viscoso em simultâneo. Assim, os modelos utilizados na previsão da resposta destes materiais são obtidos combinando os dois modelos reológicos que simulam estes dois comportamentos: molas elásticas lineares e amortecedores viscosos lineares. Diferentes combinações de molas e amortecedores originam diferentes respostas em termos de tensões ou deformações.

2.3.1 Mola elástica linear

A mola elástica linear é o modelo reológico que modela o comportamento elástico típico de sólidos e é regido pela Lei de Hooke. A equação constitutiva de um material que responde como uma mola elástica linear [Fig. 2.6] com rigidez E é a seguinte,

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \sigma. \quad (2.3)$$

A resposta deste modelo não tem dependência do tempo. A resposta a uma tensão inicial aplicada resulta numa deformação elástica instantânea, mantendo-se o valor da deformação até o carregamento ser retirado e o estado de deformação voltar ao estado inicial (instantaneamente).

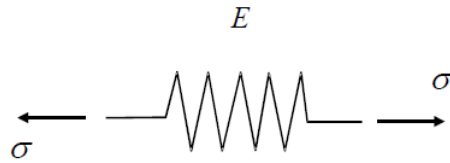


Figura 2.6: Mola elástica linear

2.3.2 Amortecedor viscoso linear

O amortecedor linear [Fig. 2.7] é o modelo reológico que modela o comportamento viscoso típico de fluidos e é regido pela Lei de Newton da viscosidade,

$$\dot{\varepsilon} = \frac{1}{\eta} \sigma, \quad (2.4)$$

onde $\dot{\varepsilon} = d\varepsilon/dt$ e η é o coeficiente de viscosidade do material. A resposta deste modelo tem dependência do tempo, uma vez que a lei envolve uma variação de deformação em ordem ao tempo.

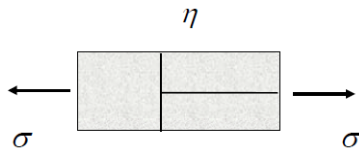


Figura 2.7: Amortecedor linear

A deformação devida a uma tensão σ_0 subitamente aplicada pode ser obtida integrando a equação constitutiva (2.4). Assumindo que a deformação inicial é nula, tem-se

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{\eta} t. \quad (2.5)$$

Na Fig. 2.8 está representada a resposta do amortecedor a uma tensão constante aplicada durante um dado período de tempo. Verifica-se que a deformação aumenta linearmente durante o período de tempo em que a tensão é aplicada. Quando a tensão é retirada as deformações até então desenvolvidas mantêm-se, sendo estas permanentes até novo carregamento.

2.3.3 Elemento de Maxwell

O elemento de Maxwell é um dos dois modelos viscoelásticos mais simples e consiste na acoplação em série de uma mola e um amortecedor [Fig. 2.9].

Para uma disposição em série como a do elemento de Maxwell, o equilíbrio estabelece que a tensão σ é igual tanto na mola como no amortecedor, ou seja,

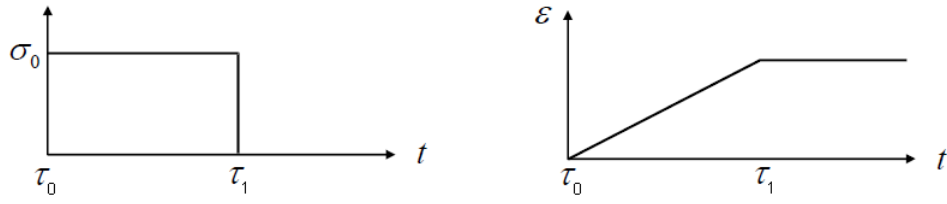


Figura 2.8: Resposta do amortecedor à aplicação de uma tensão constante

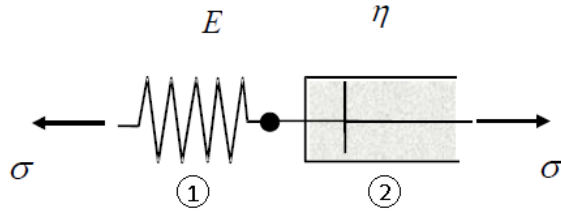


Figura 2.9: Elemento de Maxwell

$$\sigma = \sigma_1 = \sigma_2. \quad (2.6)$$

A equação de compatibilidade estabelece que

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \quad (2.7)$$

sendo possível concluir que a taxa de variação da deformação total $\dot{\varepsilon}$ pode ser obtida somando as taxas de variação correspondentes à componente elástica e viscosa do elemento, ou seja,

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2. \quad (2.8)$$

Com base nas Eqs. (2.3)-(2.4) e (2.6)-(2.8) pode-se relacionar a deformação total com as tensões através de

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta}, \quad (2.9)$$

onde $\dot{\sigma} = d\sigma/dt$. Multiplicando por E obtém-se a equação diferencial normalizada que rege o elemento de Maxwell

$$E\dot{\varepsilon} = \dot{\sigma} + \frac{\sigma}{\lambda}, \quad (2.10)$$

onde

$$\lambda = \frac{\eta}{E} \quad (2.11)$$

é conforme se verá mais à frente, a propósito do teste de relaxação (Eq.(2.19)), o tempo de relaxação do modelo, i.e., o tempo necessário para que a tensão atinja um valor igual a e^{-1} do valor imediatamente após ter sido imposta a deformação inicial ($\sigma(0) = E\varepsilon_0$).

Teste de fluência com descarregamento

Fisicamente, quando o modelo de Maxwell é sujeito a uma tensão constante σ_0 no instante $t = \tau_0$, a mola deforma imediatamente enquanto que o amortecedor, segundo a Eq (2.5), demorará tempo a reagir [Fig. 2.10]. Por isso, a deformação inicial é

$$\varepsilon(0) = \frac{\sigma_0}{E}. \quad (2.12)$$

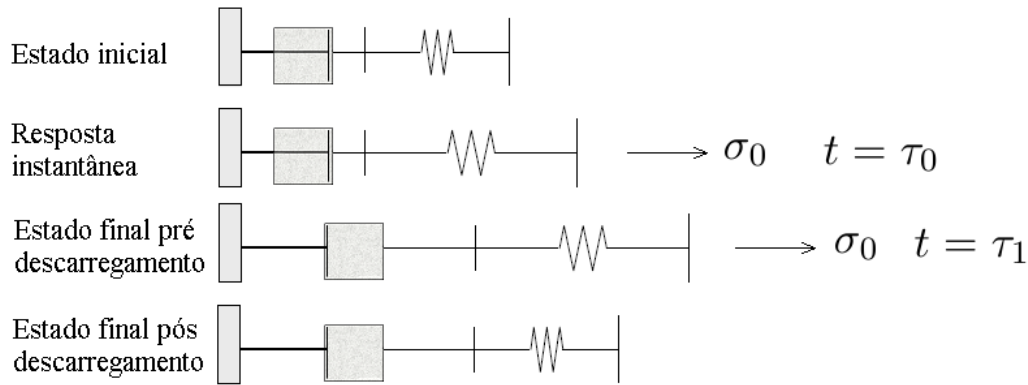


Figura 2.10: Esquema do teste de fluência-descarregamento num elemento de Maxwell

A resposta do modelo em termos de deformações resulta da resolução da equação diferencial (2.10) com a condição inicial (2.12). Uma vez que a tensão é constante, obtém-se

$$E\dot{\varepsilon} = \frac{\sigma_0}{\lambda} \rightarrow \varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E\lambda} (t - \tau_0) + C, \quad (2.13)$$

em que C é uma constante de integração.

Finalmente, introduzindo a condição inicial (2.12), a resposta do elemento de Maxwell a um teste de fluência é

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} \left(\frac{t - \tau_0}{\lambda} + 1 \right), \quad t \geq \tau_0. \quad (2.14)$$

A resposta da deformação pode ser expressa em relação à função de fluência:

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 J(t - \tau_0), \quad (2.15)$$

com

$$J(t - \tau_0) = \frac{1}{E} \left(\frac{t - \tau_0}{\lambda} + 1 \right). \quad (2.16)$$

Fisicamente, neste caso, λ é o tempo necessário para se obter uma deformação de fluência igual à deformação elástica. A resposta do elemento de Maxwell a uma tensão constante resulta no aumento linear das deformações ao longo do tempo. Quando é retirado o carregamento, a mola reage mais uma vez instantaneamente voltando ao estado inicial, mas o amortecedor mantém-se com a deformação atual pois para este se deformar é necessário que tenha uma tensão aplicada [Eq. (2.5)]. Assim, existe uma recuperação elástica da deformação σ_0/E , mantendo-se a deformação no amortecedor [Fig. 2.11].

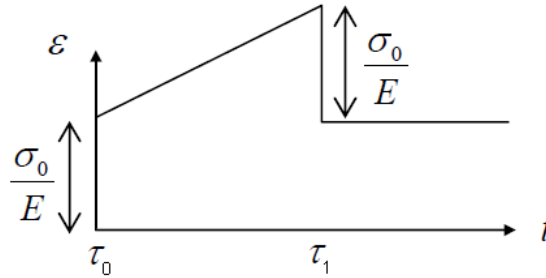


Figura 2.11: Resposta do elemento de Maxwell a uma tensão constante e descarregamento

Teste de relaxação

Se for imposta uma deformação inicial ε_0 ao elemento de Maxwell no instante inicial $t = \tau_0$, essa deformação é admitida instantaneamente na mola e, por isso, a tensão inicial no modelo é

$$\sigma(0) = \varepsilon_0 E. \quad (2.17)$$

Após o instante inicial, a deformação inicial da mola diminui na mesma medida em que o amortecedor deforma até admitir toda a deformação inicial [Fig. 2.12].

A resposta do modelo em termos de tensões resulta da resolução da equação diferencial (2.10) com a condição inicial (2.17). Uma vez que a deformação é constante, a Eq. (2.10) fica

$$\dot{\sigma} = -\frac{\sigma}{\lambda}. \quad (2.18)$$

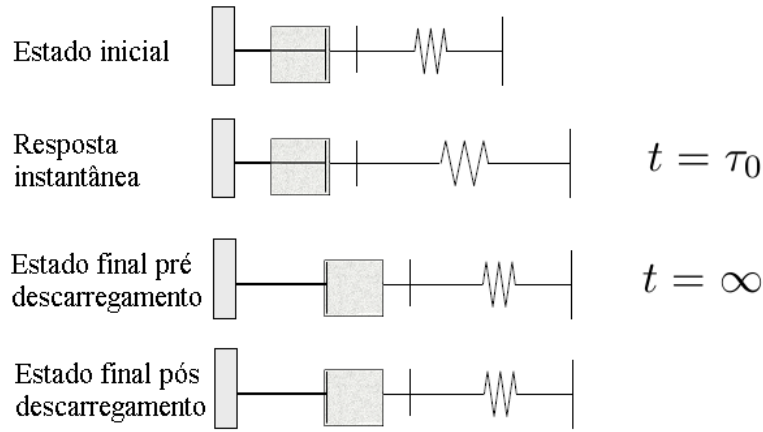


Figura 2.12: Esquema do teste de relaxação num elemento de Maxwell

A solução desta equação diferencial é

$$\sigma(t) = \sigma_0 \exp\left(-\frac{t - \tau_0}{\lambda}\right), \quad t \geq \tau_0. \quad (2.19)$$

e fornece a resposta do elemento de Maxwell em termos de tensões.

Nesta expressão, o significado de $\lambda = \eta/E$ como um tempo de relaxação característico é evidente. Fisicamente, é o tempo necessário para a tensão tomar o valor de $1/e$ do seu valor inicial. É também o tempo para o qual a função da tensão apresenta um ponto de inflexão quando esta é definida em escala logarítmica. Introduzindo a condição inicial (2.17) na Eq. (2.19) fica

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 E \exp\left(-\frac{t - \tau_0}{\lambda}\right), \quad t \geq \tau_0. \quad (2.20)$$

A resposta da tensão pode também ser expressa em relação à função de relaxação

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 E (t - \tau_0), \quad (2.21)$$

com

$$E(t - \tau_0) = E \exp\left(-\frac{t - \tau_0}{\lambda}\right), \quad (2.22)$$

A resposta do modelo de Maxwell a uma deformação constante resulta na diminuição das tensões até zero quando se tende para infinito [Fig. 2.13].

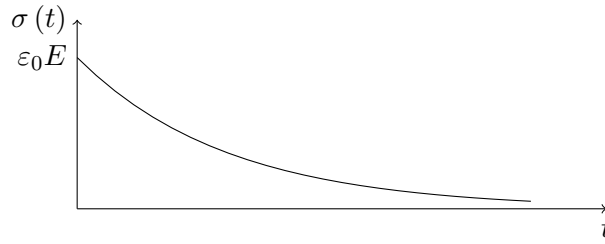


Figura 2.13: Resposta do elemento de Maxwell a um teste de relaxação.

2.3.4 Elemento de Kelvin

A par com o elemento de Maxwell, o elemento de Kelvin é um dos modelos viscoelásticos mais simples e consiste na acoplação em paralelo de uma mola e um amortecedor [Fig. 2.14].

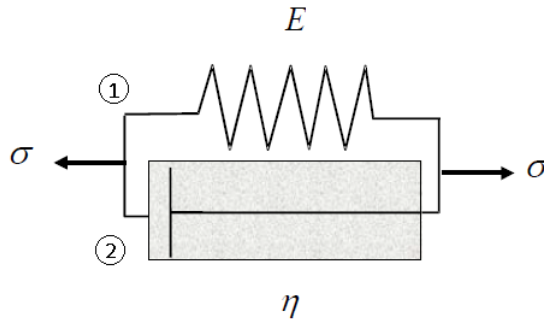


Figura 2.14: Elemento de Kelvin

Para uma disposição em paralelo como o elemento de Kelvin, a equação de equilíbrio estabelece que

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2. \quad (2.23)$$

A equação de compatibilidade garante que a deformação é igual na mola e no amortecedor

$$\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2. \quad (2.24)$$

Assim, considerando as Eqs. (2.3)-(2.4) e (2.23)-(2.24) pode-se estabelecer a equação diferencial que governa o elemento de Kelvin, a qual é dada por

$$\sigma = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}. \quad (2.25)$$

Dividindo todos os termos da Eq. (2.25) por E , obtém-se a equação diferencial normalizada que rege o elemento de Kelvin

$$\frac{\sigma}{E} = \varepsilon + \lambda_J \dot{\varepsilon}, \quad (2.26)$$

onde

$$\lambda_J = \frac{\eta}{E} \quad (2.27)$$

é, conforme se verá a seguir, a propósito do teste de fluência, o tempo de retardação do modelo, o tempo necessário para que a deformação atinja o valor de $(1 - e^{-1})$ do valor da deformação para $t = \infty$.

Teste de fluência com descarregamento

Se uma tensão constante σ_0 for subitamente aplicada ao modelo de Kelvin no instante $t = \tau_0$, a deformação na mola é impedida pelo amortecedor, que não reage instantaneamente [Fig. 2.15]. Visto que a mola não deforma, inicialmente a tensão é totalmente equilibrada pelo amortecedor. Assim, a curva de fluência começa com um declive inicial σ_0/η e a condição inicial é

$$\varepsilon(0) = 0. \quad (2.28)$$

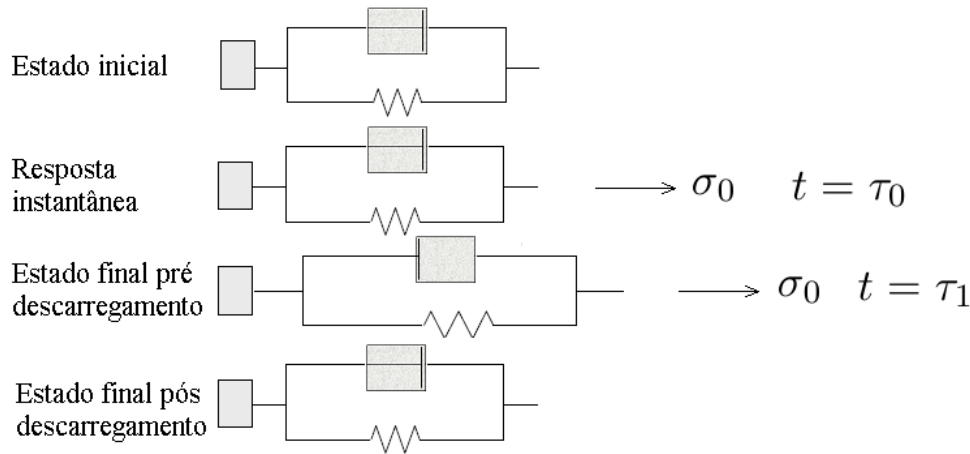


Figura 2.15: Esquema do teste de fluência no elemento de Kelvin

Após o instante inicial ocorrem deformações e parte da tensão é transferida do amortecedor para a mola. O declive da curva de fluência passa então a ser σ_2/η , onde σ_2 é a tensão no amortecedor, que tende a decrescer com o tempo. No limite, quando $\sigma_2 = 0$, a mola equilibra a totalidade da tensão e por isso a deformação máxima é σ_0/E .

Resolvendo a equação diferencial (2.26) tem-se a solução homogênea

$$\varepsilon(t) = C \exp\left(-\frac{t - \tau_0}{\lambda_J}\right), \quad (2.29)$$

onde C é uma constante de integração, e a solução particular

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E}. \quad (2.30)$$

Introduzindo a condição inicial (2.28), obtém-se a resposta do modelo a um teste de fluência

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} \left[1 - \exp\left(-\frac{t - \tau_0}{\lambda_J}\right) \right], \quad t \geq \tau_0, \quad (2.31)$$

que condiz com a descrição apresentada anteriormente.

O parâmetro λ_J , em contraste com o tempo de relaxação do modelo de Maxwell, denomina-se de *tempo de retardação* do material e é uma medida do tempo que demora a acumulação de deformação por fluência. Quanto menor o tempo de retardação, mais rápido se desenvolvem as deformações por fluência. Note-se que a Eq. (2.31) permite concluir que, para $t - \tau_0 = \lambda_J$, $\varepsilon = (1 - e^{-1}) \varepsilon(\infty)$ como já foi referido anteriormente.

A função de fluência é neste caso dada por

$$J(t - \tau_0) = \frac{1}{E} \left[1 - \exp\left(-\frac{t - \tau_0}{\lambda_J}\right) \right]. \quad (2.32)$$

Quando o elemento de Kelvin é descarregado, o amortecedor impede a resposta instantânea da mola. Supondo que o modelo é descarregado no instante $t = \tau_1$. A lei constitutiva com tensão nula fica

$$0 = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}. \quad (2.33)$$

Resolvendo a Eq (2.33) obtém-se

$$\varepsilon(t) = C \exp\left(-\frac{t - \tau_1}{\lambda_J}\right), \quad (2.34)$$

em que C é a constante de integração. Aqui t é medido a partir do instante em que o carregamento foi retirado τ_1 . A partir da Eq. (2.31) a deformação no instante $t = \tau_1$ é dada por

$$\varepsilon(\tau_1) = \frac{\sigma_0}{E} \left[1 - \exp\left(-\frac{\tau_1 - \tau_0}{\lambda_J}\right) \right]. \quad (2.35)$$

Usando a Eq. (2.35) como condição inicial na Eq. (2.34) obtém-se a resposta do elemento quando é descarregado, a qual é dada por

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} \exp\left(-\frac{t - \tau_1}{\lambda_J}\right) \left[1 - \exp\left(-\frac{\tau_1 - \tau_0}{\lambda_J}\right)\right], \quad t > \tau_1. \quad (2.36)$$

A resposta do modelo de Kelvin à fluência e ao descarregamento é apresentada na Fig. (2.16). Verifica-se que, neste modelo, não existem deformações instantâneas ou permanentes.

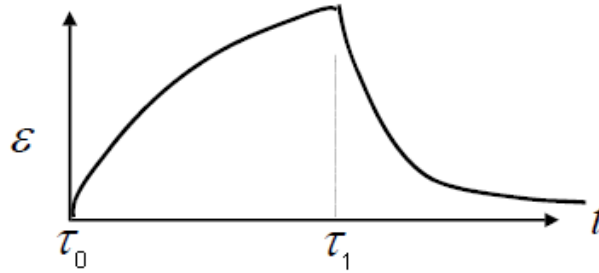


Figura 2.16: Resposta do elemento de Kelvin a uma tensão constante e descarregamento

Teste de relaxação

Considere-se que o histórico de deformação da Fig. 2.17 é aplicado ao modelo de Kelvin.

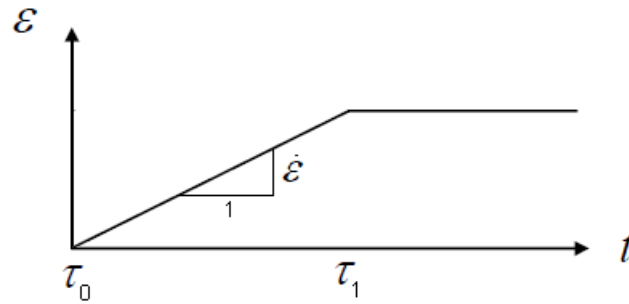


Figura 2.17: Histórico de deformação aplicado ao elemento de Kelvin.

No intervalo de tempo $[\tau_0, \tau_1]$, onde existe variação da deformação, a tensão pode ser calculada resolvendo a Eq. (2.25), sabendo que neste caso se tem

$$\varepsilon = \dot{\varepsilon}t, \quad (2.37)$$

ficando

$$\sigma = (Et + \eta) \dot{\varepsilon}. \quad (2.38)$$

Neste intervalo, ambos os elementos do modelo de Kelvin, mola e amortecedor, contribuem para a tensão total no modelo. À medida que a mola se deforma, aumenta a tensão na mesma e, enquanto o amortecedor é sujeito a uma variação de deformação, é solicitado por um estado de tensão. A partir do instante τ_1 a variação da deformação é nula. Por isso, a tensão no amortecedor é nula e a tensão total no modelo é apenas resultado da deformação da mola.

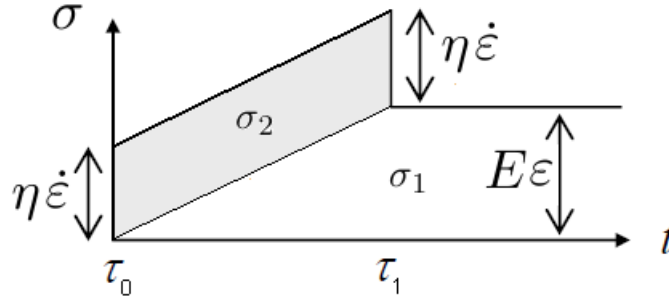


Figura 2.18: Ensaio de relaxação no elemento de Kelvin quando solicitado com o histórico de deformação da figura 2.17.

No caso em que uma deformação constante ε_0 é subitamente aplicada ao modelo de Kelvin, o intervalo $[\tau_0 - \tau_1]$ tende para zero e, conseqüentemente, a tensão no amortecedor e no elemento de Kelvin tende para infinito.

2.3.5 Modelo sólido linear padrão - formato de Maxwell

Como foi visto nos pontos anteriores, a resposta do elemento de Maxwell a um ensaio de fluência é ilimitada e a resposta do elemento de Kelvin a um ensaio de relaxação resulta numa tensão infinita e instantânea. Por isso, são necessários modelos com combinações mais complexas de molas e amortecedores para modelar materiais com outro tipo de comportamento.

Colocando um elemento de Maxwell em paralelo com uma mola obtém-se um modelo muito útil, conhecido como sólido linear padrão (*standard linear solid*) no formato de Maxwell apresentado na Fig. 2.19. Diz-se que está no formato de Maxwell pois é forma mais simples do modelo generalizado de Maxwell, como se verá mais á frente.

A mola com rigidez E_1 fornece ao modelo uma rigidez a longo prazo, após a tensão no elemento de Maxwell ter relaxado completamente.

Neste arranjo, o elemento de Maxwell e a mola paralela (i.e., cada "braço") admitem a mesma deformação

$$\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2, \quad (2.39)$$

e a tensão total σ é igual à soma das tensões em cada "braço" do modelo, ou seja,

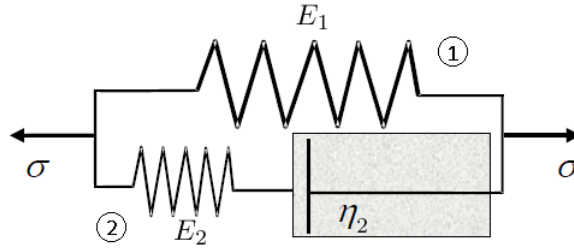


Figura 2.19: Modelo sólido linear padrão - formato de Maxwell

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2. \quad (2.40)$$

A obtenção de σ_2 é mais complexa. A Eq. (2.10) está expressa em relação à tensão e à variação da mesma, logo é necessário outro método de resolução de equações diferenciais que permita a resolução deste tipo de problemas. A transformação de Laplace é muito conveniente neste e noutros problemas viscoelásticos mais complexos, pois reduz equações diferenciais em equações algébricas. No Apêndice A estão listados alguns dos pares de transformação mais comuns neste tipo de problemas.

Uma vez que a tensão e a deformação são nulas quando se tende para a origem à esquerda, a transformada das derivadas em relação ao tempo são apenas a variável s vezes a transformada da função (a transformada de uma função é representada com uma barra superior). Assim, tem-se

$$\mathcal{L}[\dot{\epsilon}] = s\bar{\epsilon} \quad (2.41)$$

e

$$\mathcal{L}[\dot{\sigma}] = s\bar{\sigma}. \quad (2.42)$$

Assim, a transformada da Eq. (2.10) correspondente ao elemento de Maxwell fica

$$E_2 \dot{\epsilon} = \dot{\sigma}_2 + \frac{1}{\lambda} \sigma_2 \rightarrow E_2 s \bar{\epsilon} = s \bar{\sigma}_2 + \frac{1}{\lambda} \bar{\sigma}_2. \quad (2.43)$$

Resolvendo a Eq. (2.43) obtém-se

$$\bar{\sigma}_2 = \frac{E_2 s}{s + \frac{1}{\lambda}} \bar{\epsilon}. \quad (2.44)$$

Adicionando a tensão na mola isolada $\bar{\sigma}_1 = E_1 \bar{\epsilon}$, a tensão total é

$$\bar{\sigma} = E_1 \bar{\epsilon} + \frac{E_2 s}{s + \frac{1}{\lambda}} \bar{\epsilon} = \left[E_1 + \frac{E_2 s}{s + \frac{1}{\lambda}} \right] \bar{\epsilon}. \quad (2.45)$$

O resultado anterior pode ser escrito da seguinte forma

$$\bar{\sigma} = \mathcal{E} \bar{\varepsilon}, \quad (2.46)$$

onde, para este modelo, o parâmetro \mathcal{E} é a rigidez equivalente

$$\mathcal{E} = E_1 + \frac{E_2 s}{s + \frac{1}{\lambda}} = E_1 + \frac{1}{\frac{1}{E_2} + \frac{1}{s\eta_2}}, \quad (2.47)$$

e corresponde a uma associação de molas em que o amortecedor é substituído por uma mola com rigidez $s\eta_2$. A Eq. (2.46), que é claramente idêntica à lei de Hooke $\sigma = E\varepsilon$ mas no domínio de Laplace, é denominada de *equação viscoelástica constitutiva associada*. Aqui a expressão de \mathcal{E} corresponde ao modelo sólido linear padrão no formato de Maxwell.

Ensaio de relaxação

Para uma dada função de deformação constante imposta $\varepsilon(t)$, obtém-se a função da tensão resultante em três passos:

1. Obter a expressão da transformada da função da deformação, $\bar{\varepsilon}(s)$.
2. Formar o produto algébrico $\bar{\sigma}(s) = \mathcal{E} \bar{\varepsilon}(s)$.
3. Obter o inverso da transformada do resultado para chegar à função da tensão no plano do tempo.

No caso do ensaio de relaxação, a função da deformação $\varepsilon(t)$ é definida como a multiplicação da deformação inicial constante com a função de passo unitário Heaviside $H(t)$

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 H(t), \quad H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}, \quad (2.48)$$

que tem como transformada de Laplace

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_0}{s}. \quad (2.49)$$

Usando a Eq. (2.49) na Eq. (2.46) e dividindo todos os termos por ε_0 tem-se

$$\frac{\bar{\sigma}}{\varepsilon_0} = \frac{E_1}{s} + \frac{E_2}{s + \frac{1}{\lambda}}. \quad (2.50)$$

Uma vez que $\mathcal{L}^{-1}[1/(s+a)] = e^{-at}$, a Eq. (2.50) pode ser diretamente invertida dando

$$\frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} \equiv E(t) = E_1 + E_2 \exp\left(-\frac{t}{\lambda}\right), t \geq 0. \quad (2.51)$$

A função (2.51), que é precisamente a solução do elemento de Maxwell mais a solução da mola isolada E_1 , foi usada para gerar a curva ilustrada na Fig. 2.5 assim como a curva ilustrada na Fig. 2.20.

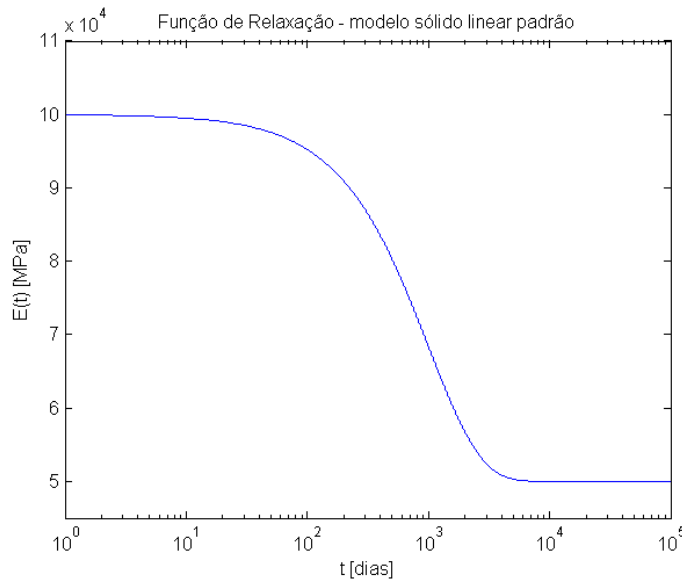


Figura 2.20: Função de relaxação do modelo sólido linear padrão no formato de Maxwell com $E_1 = 50000 \text{ MPa}$, $E_2 = 50000 \text{ MPa}$, e $\lambda = 1000 \text{ dias}$.

Ensaio de fluência

No caso do ensaio de fluência, a função da tensão $\sigma(t)$ é definida como a multiplicação da tensão inicial constante com a função de passo unitário Heaviside $H(t)$

$$\sigma(t) = \sigma_0 H(t), \quad H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}, \quad (2.52)$$

que tem como transformada de Laplace

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma_0}{s}. \quad (2.53)$$

A forma da Eq. (2.46) é conveniente quando se quer obter a função da tensão para uma dada deformação imposta. Para obter a função da deformação para uma dada tensão imposta convém inverter a Eq. (2.46), ficando

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\bar{\sigma}}{E_1 + \frac{E_2 s}{s + \frac{1}{\lambda}}}. \quad (2.54)$$

Substituindo a Eq. (2.53) na Eq. (2.54) obtém-se

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sigma_0}{s E_1 + \frac{E_2 s^2}{s + \frac{1}{\lambda}}}. \quad (2.55)$$

Esta expressão é mais difícil de inverter manualmente, e nestes casos pode ser útil a utilização de *software* que permita manipulação simbólica. Recorrendo a essa metodologia com o programa *MapleTM* [81], é possível inverter a Eq. (2.55) obtendo-se a função de fluência para este modelo:

$$\frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0} \equiv J(t) = J_0 + (J_\infty - J_0) \left(1 - e^{-t/\lambda_J}\right) \quad (2.56)$$

onde

$$J_0 = \frac{1}{E_1 + E_2}, \quad J_\infty = \frac{1}{E_1}, \quad \lambda_J = \lambda \left(\frac{E_1 + E_2}{E_1} \right) \quad (2.57)$$

O parâmetro J_0 corresponde à ação das duas molas E_1 e E_2 atuando em paralelo, e o parâmetro J_∞ corresponde à ação da mola isolada E_1 atuando individualmente, como esperado. Menos óbvio é o tempo de retardação λ_J , que é mais longo que o tempo de relaxação λ por um fator igual ao quociente entre J_∞ e J_0 .

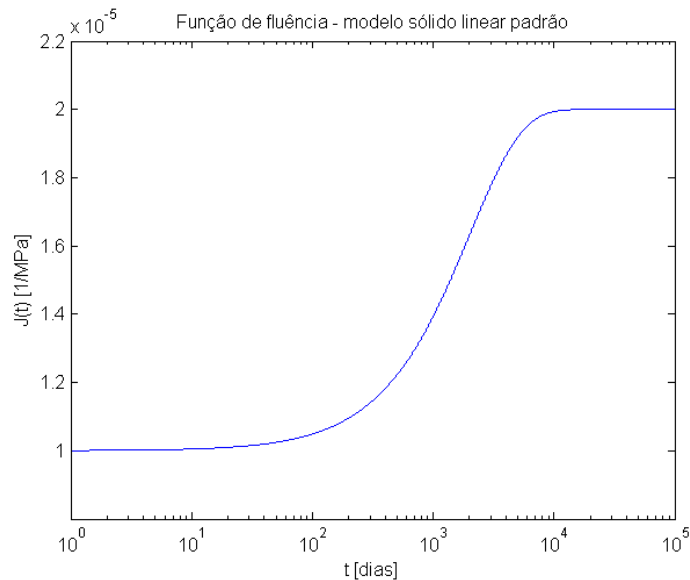


Figura 2.21: Função de fluência do modelo sólido linear padrão no formato de Maxwell com $E_1 = 50000 \text{ MPa}$, $E_2 = 50000 \text{ MPa}$ e $\lambda = 1000 \text{ dias}$

Na Fig. 2.21 está definida a função de fluência (2.56). Analisando os resultados das funções de fluência e de relaxação do modelo sólido linear padrão no formato de Maxwell, consegue-se finalmente demonstrar a diferença entre os tempos de retardação e de relaxação. Comparando as Figs. 2.20 e 2.21 poder-se-à verificar que o ponto de inflexão das curvas ocorre em instantes diferentes. Da Eq. (2.57) pode-se inferir que, de facto, para este modelo o tempo de relaxação é menor que o tempo de retardação. Isto implica que, neste caso, o processo de relaxação ocorra com maior celeridade que o processo de fluência, o que já tinha sido referido no início do presente capítulo e remetido para posterior demonstração.

2.3.6 Modelo sólido linear padrão - formato de Kelvin

Colocando em série um elemento de Kelvin com uma mola obtém-se outro modelo, conhecido como sólido linear padrão no formato de Kelvin, ilustrado na Fig. 2.22. Diz-se estar no formato de Kelvin pois é a forma mais simples do modelo generalizado de Kelvin, como se poderá constatar mais adiante.

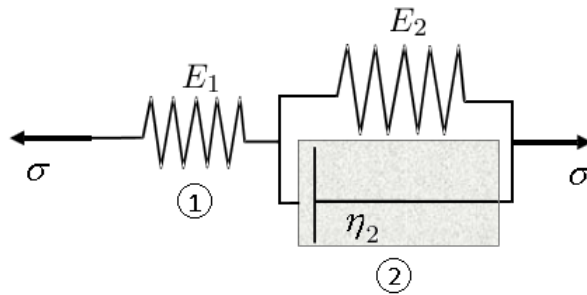


Figura 2.22: Modelo sólido linear padrão - formato de Kelvin

Neste caso, a mola com rigidez E_1 fornece uma rigidez instantânea ao modelo, pois já se viu que a resposta instantânea do modelo de Kelvin a uma tensão constante é nula.

Neste arranjo, a deformação total é igual à soma das deformações dos dois componentes

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \quad (2.58)$$

e ambos os componentes admitem a mesma tensão

$$\sigma = \sigma_1 = \sigma_2. \quad (2.59)$$

Considere-se novamente as Transformadas de Laplace para resolver as Eqs. (2.58) e (2.59). A transformada da Eq. (2.26), correspondente ao elemento de Kelvin, fica

$$\bar{\sigma} = E_2 \bar{\varepsilon}_2 + s \lambda_J E_2 \bar{\varepsilon}_2 \quad (2.60)$$

que, resolvendo em ordem a $\bar{\varepsilon}_2$, fica

$$\bar{\varepsilon}_2 = \frac{\bar{\sigma}}{E_2 + s\lambda_J E_2}. \quad (2.61)$$

Adicionando a deformação na mola isolada $\bar{\varepsilon}_1 = \bar{\sigma}/E_1$, a deformação total é definida pela seguinte expressão

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\bar{\sigma}}{E_1} + \frac{\bar{\sigma}}{E_2 + s\lambda_J E_2} = \left[\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2 + s\lambda_J E_2} \right] \bar{\sigma}. \quad (2.62)$$

O resultado anterior pode ser escrito da seguinte forma

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\mathcal{E}}}, \quad (2.63)$$

onde, para este modelo, o parâmetro $\frac{1}{\bar{\mathcal{E}}}$ é a flexibilidade equivalente

$$\frac{1}{\bar{\mathcal{E}}} = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2 + s\lambda_J E_2} = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2 + s\eta_2}, \quad (2.64)$$

o que, mais uma vez, corresponde a substituir o amortecedor por uma mola de rigidez $s\eta_2$.

Ensaio de fluência

No caso do ensaio de fluência, a função da tensão é definida como a multiplicação da tensão inicial (constante) com a função de passo unitário Heaviside $H(t)$

$$\sigma(t) = \sigma_0 H(t), \quad H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}, \quad (2.65)$$

e a sua transformada de Laplace é

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma_0}{s}. \quad (2.66)$$

Substituindo a Eq. (2.66) na Eq. (2.63) e dividindo todos os termos por σ_0 tem-se

$$\frac{\bar{\varepsilon}}{\sigma_0} = \frac{1}{E_1} \frac{1}{s} + \frac{1}{E_2 \lambda_J} \frac{1}{s \left(\frac{1}{\lambda_J} + s \right)}. \quad (2.67)$$

Invertendo a Eq. (2.67) com base nos pares de transformadas apresentados no Apêndice A, a função de fluência fica

$$\frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0} \equiv J(t) = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\lambda_J}\right) \right]. \quad (2.68)$$

A função (2.68), que é precisamente a solução do elemento de Kelvin mais a solução da mola isolada $1/E_1$, foi usada para gerar a curva ilustrada na Fig. 2.20.

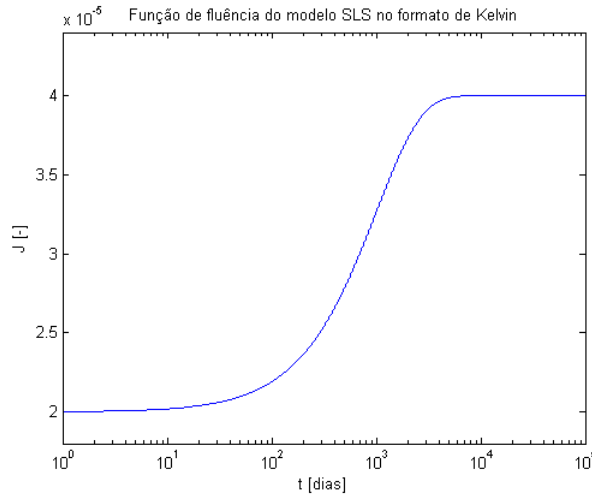


Figura 2.23: Função de fluência do modelo sólido linear padrão no formato de Kelvin com $E_1 = 50000 \text{ MPa}$, $E_2 = 50000 \text{ MPa}$, e $\lambda_J = 1000 \text{ dias}$.

Ensaio de relaxação

No caso do teste de relaxação, a função da deformação é definida como a multiplicação da deformação inicial constante com a função de passo unitário Heavside $H(t)$

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 H(t), \quad H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}, \quad (2.69)$$

e a sua transformada de Laplace é

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_0}{s}. \quad (2.70)$$

Colocando a Eq. (2.63) em ordem à tensão tem-se

$$\bar{\sigma} = \frac{\bar{\varepsilon}}{\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2 + s\lambda_J E_2}}. \quad (2.71)$$

Substituindo a Eq. (2.70) na Eq. (2.71) e dividindo todos os termos por ε_0 tem-se

$$\frac{\bar{\sigma}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\frac{s}{E_1} + \frac{s}{E_2 + sE_2\lambda_J}}, \quad (2.72)$$

e manipulando algebricamente obtém-se

$$\frac{\bar{\sigma}}{\varepsilon_0} = \frac{E_1}{\lambda_J \frac{1}{s \left(\frac{E_1 + E_2}{E_2 \lambda_J} + s \right)}} + E_1 \frac{1}{\frac{E_1 + E_2}{E_2 \lambda_J} + s}. \quad (2.73)$$

Invertendo a Eq. (2.73) com base nos pares de transformadas apresentados no Apêndice A, e após alguma manipulação algébrica, a função de relaxação fica

$$\frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} \equiv E(t) = E_\infty + [E_0 - E_\infty] \exp\left(-\frac{t}{\lambda}\right). \quad (2.74)$$

onde

$$E_0 = E_1, \quad (2.75)$$

e

$$E_\infty = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2}, \quad (2.76)$$

e

$$\lambda = \lambda_J \left(\frac{E_2}{E_1 + E_2} \right). \quad (2.77)$$

O parâmetro E_0 corresponde à ação da mola isolada E_1 e é o valor inicial da função de relaxação. O parâmetro E_∞ é o valor da função de relaxação quando se tende para infinito e corresponde à ação da mola isolada E_1 em conjunto com a mola do elemento de Kelvin E_2 . Neste modelo também se verifica que o tempo de relaxação λ é menor que o tempo de retardação λ_J . A função (2.74) é ilustrada na Fig. 2.24.

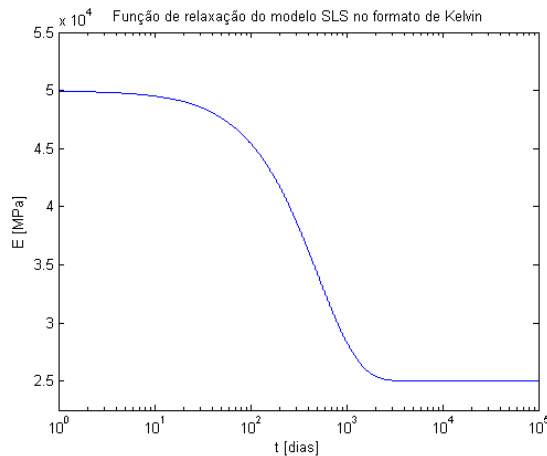


Figura 2.24: Função de relaxação do modelo sólido linear padrão no formato de Kelvin com $E_1 = 50000 \text{ MPa}$, $E_2 = 50000 \text{ MPa}$, e $\lambda_J = 1000 \text{ dias}$.

2.3.7 Modelos generalizados

Os modelos elementares de Maxwell e Kelvin são adequados para análises qualitativas e conceituais, mas geralmente não são os mais indicados para descrever quantitativamente o comportamento real dos materiais. Para permitir representar modelos mais complexos é necessário aumentar o número de parâmetros, combinando um certo número de molas e amortecedores. Uma maneira sistemática de o fazer é construir modelos generalizados de Maxwell e Kelvin ilustrados na Fig. 2.25.

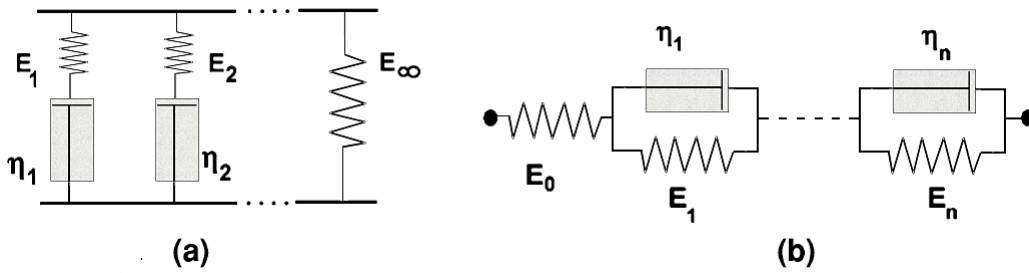


Figura 2.25: Modelos generalizados de Maxwell e Kelvin com elasticidade instantânea [63].

Modelo generalizado de Maxwell

O *modelo generalizado de Maxwell* é composto por $n + 1$ elementos constituintes em paralelo, sendo n o número de modelos elementares de Maxwell mais uma mola isolada que garante o comportamento típico de sólido elástico [Fig. 2.25a].

A equação diferencial (2.9) para um elemento de Maxwell genérico α de um modelo generalizado de Maxwell pode ser escrita na forma operacional

$$\dot{\varepsilon} = \frac{d}{dt} \varepsilon(t) = \left(\frac{1}{E_\alpha} \frac{d}{dt} + \frac{1}{\eta_\alpha} \right) \sigma_\alpha \quad (2.78)$$

onde E_α , η_α e σ_α são respetivamente o módulo de elasticidade, o coeficiente de viscosidade e a tensão do elemento α , respetivamente. O operador diferencial d/dt pode ser manipulado como uma entidade algébrica [63]. No modelo generalizado de Maxwell a deformação é igual em todos os elementos constituintes e a tensão total é igual à soma das tensões de todos eles, sendo dada por

$$\sigma(t) = \left(E_\infty + \sum_{\alpha=1}^n \frac{d/dt}{\frac{1}{E_\alpha} \frac{d}{dt} + \frac{1}{\eta_\alpha}} \right) \varepsilon(t). \quad (2.79)$$

A função de relaxação do modelo generalizado de Maxwell é, para um valor genérico de τ , igual à soma das funções de relaxação de todos os elementos de Maxwell e do módulo de elasticidade da mola isolada, ou seja,

$$E(t - \tau) = E_\infty + \sum_{\alpha=1}^n E_\alpha e^{-\frac{t-\tau}{\lambda_\alpha}}, \quad (2.80)$$

onde λ_α corresponde ao tempo de relaxação do elemento de Maxwell α , sendo dado por

$$\lambda_\alpha = \frac{\eta_\alpha}{E_\alpha}. \quad (2.81)$$

O modelo generalizado de Maxwell providencia uma variação exponencial da tensão adicionando contribuições com diferentes tempos de relaxação, um de cada elemento da cadeia. Por isso, é possível aproximar funções baseadas em dados experimentais com qualquer grau de precisão pretendido se forem utilizados os termos necessários.

Modelo generalizado de Kelvin

O *modelo generalizado de Kelvin* é composto por n modelos elementares de Kelvin dispostos em série e uma mola isolada (para garantir uma resposta elástica instantânea). A tensão é igual em todos os elementos, enquanto que a deformação total é igual à soma das deformações em cada um deles. Escrevendo a Eq. (2.25) para um elemento de Kelvin genérico α , tem-se

$$\sigma_\alpha(t) = \left(E_\alpha + \eta_\alpha \frac{\partial}{\partial t} \right) \varepsilon_\alpha. \quad (2.82)$$

Assim, para o modelo generalizado de Kelvin, a resposta da deformação total é igual ao contributo das deformações de cada elemento com diferentes tempos de retardação

$$\varepsilon(t) = \left(\frac{1}{E_0} + \sum_{\alpha=1}^n \frac{1}{E_\alpha + \eta_\alpha \frac{\partial}{\partial t}} \right) \sigma(t). \quad (2.83)$$

Da Eq. (2.32) e da Fig. 2.25 é fácil concluir que função de fluência específica do modelo generalizado de Kelvin é, para um valor genérico de τ ,

$$J(t - \tau) = \frac{1}{E_0} + \sum_{\alpha=1}^n \frac{1}{E_\alpha} \left[1 - e^{-\frac{t-\tau}{\lambda_{J\alpha}}} \right]. \quad (2.84)$$

em que

$$\lambda_{J\alpha} = \frac{\eta_\alpha}{E_\alpha} \quad (2.85)$$

é o tempo de retardação do elemento de Kelvin α .

Para encontrar a função de relaxação é necessário resolver a equação diferencial (2.83).

2.3.8 Princípio da correspondência

Em materiais elásticos sob a ação de cargas quasi-estáticas, as tensões e os deslocamentos podem depender do tempo, mas a solução é simples, uma vez que não surgem derivadas em ordem ao tempo nas equações governativas. Nos materiais viscoelásticos, a equação constitutiva é uma equação diferencial envolvendo o tempo, o que complica a sua resolução. O *princípio da correspondência viscoelástica* que aqui é apresentado, consiste na adaptação de uma solução elástica previamente disponível para torna-la aplicável a um material viscoelástico.

Se um problema mecânico - a estrutura, os seus materiais, e as suas condições de fronteira estáticas e cinemáticas - é sujeito à transformação de Laplace, nenhuns dos aspetos espaciais da sua descrição serão alterados: o problema será idêntico, pelo menos espacialmente. A versão do problema no domínio de Laplace pode então ser interpretada como um problema de análise de tensão num corpo elástico com a mesma forma do corpo viscoelástico, de modo que a solução para um corpo elástico será aplicável a um corpo viscoelástico correspondente, mas no domínio de Laplace.

Tendo transformando o problema viscoelástico num problema elástico associado por transformação de Laplace, podem ser utilizadas as soluções elásticas disponíveis na literatura: primeiro encontra-se a solução do problema elástico associado, e depois procede-se à inversão de Laplace para voltar ao domínio do tempo. Este assunto é tratado, por exemplo, em [48].

2.4 Lei constitutiva integral

Nesta secção será exposta a formulação integral de problemas viscoelásticos, com vista à resolução numérica deste tipo de problemas a partir de quaisquer funções de fluência e relaxação.

Tome-se agora como exemplo o elemento de Maxwell. Até aqui foi estudada a resposta a uma dada deformação imposta, mas essa resposta não é válida para um histórico de deformações arbitrárias. Tendo em conta que o princípio da sobreposição é válido no presente caso, a resposta total devida à deformação ε_0 imposta no instante $t = \tau_0$ e à deformação ε_1 imposta no instante $t = \tau_1$ é dada por (recordar Eq. (2.22) e Eq. (2.21))

$$\sigma(t) = E\varepsilon_0 \exp\left(-\frac{t - \tau_0}{\lambda}\right) + E\varepsilon_1 \exp\left(-\frac{t - \tau_1}{\lambda}\right). \quad (2.86)$$

Generalizando, tem-se para n excitações:

$$\sigma(t) = \sum_{i=1}^n E \varepsilon_i \exp\left(-\frac{t - \tau_i}{\lambda}\right). \quad (2.87)$$

Para o caso limite em que $\varepsilon \rightarrow 0$ obtém-se o integral

$$\sigma(t) = \int E \exp\left(-\frac{t - \tau_i}{\lambda}\right) d\varepsilon, \quad (2.88)$$

e, transformando este integral de *Stiltjes* num integral de *Riemann*, obtém-se

$$\sigma(t) = \int_0^t E \exp\left(-\frac{t - \tau}{\lambda}\right) \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau. \quad (2.89)$$

Foi visto anteriormente, na secção 2.3.3, que a função

$$E(t - \tau) = E \exp\left(-\frac{t - \tau}{\lambda}\right) \quad (2.90)$$

é a função de relaxação característica do elemento de Maxwell. Introduzida a função de relaxação pode-se definir uma expressão geral para a tensão no instante t como uma função do histórico de deformações:

$$\sigma(t) = \int_0^t E(t - \tau) \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau. \quad (2.91)$$

Esta equação é conhecida como integral hereditário [86]. Por cada combinação de molas e amortecedores pode ser derivada uma expressão específica para $E(t - \tau)$. Além disso, podem-se postular funções de relaxamento para usar em (2.91) que não têm interpretação mecânica direta em termos de molas e amortecedores. Se assim for, não se pode mais escrever explicitamente $E(t - \tau)$ como uma soma de funções exponenciais de potência negativa.

A Eq. (2.91) fornece a tensão como uma função do histórico de deformação. Experiências de fluência, por outro lado, fornecem a deformação corrente em função do histórico de tensões aplicadas. Tal necessita de uma inversão da Eq. (2.91), que resulta em

$$\varepsilon(t) = \int_0^t J(t - \tau) \dot{\sigma}(\tau) d\tau, \quad (2.92)$$

sendo $J(t - \tau)$ a *função fluência*, que dá o valor corrente da deformação para um dado incremento de tensão. Após a introdução do módulo de elasticidade, a função de fluência pode também ser escrita como

$$J(t - \tau) = \frac{1 + \varphi(t - \tau)}{E} \quad (2.93)$$

sendo $\varphi(t - \tau)$ o coeficiente de fluência.

2.4.1 Formulação geral do integral hereditário

Nesta secção os integrais hereditários são derivados, mais generalizadamente, a partir de alguns princípios básicos. A deformação devido a um incremento de carregamento constante no instante $t = 0$ é $\varepsilon(t) = \sigma(0) J(t)$, onde $J(t)$ é a função de fluência. A deformação devida ao segundo carregamento $\Delta\sigma$ aplicado num instante posterior qualquer τ é $\varepsilon(t) = \Delta\sigma J(t - \tau)$. A deformação total devida a ambos os carregamentos é (Fig. 2.26)

$$\varepsilon(t) = \sigma(0) J(t) + \Delta\sigma J(t - \tau). \quad (2.94)$$

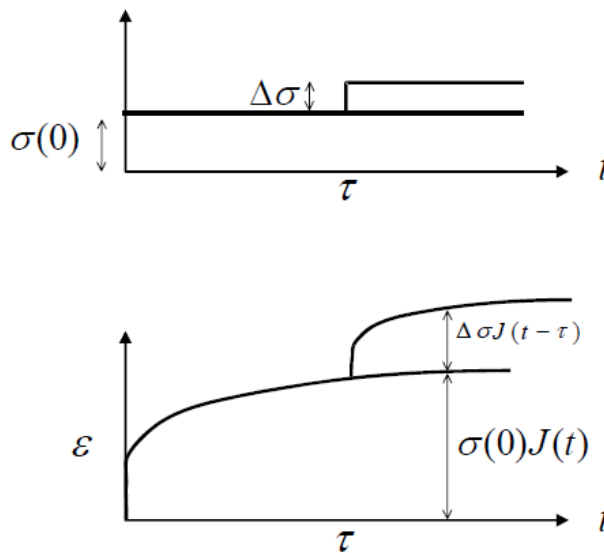


Figura 2.26: Sobreposição de efeitos

Generalizando a equação (2.94) para um número infinito de carregamentos, $d\sigma_i$, tem-se

$$\varepsilon(t) = J(t) \sigma(0) + \int_0^t J(t - \tau) \dot{\sigma}(\tau) d\tau. \quad (2.95)$$

E o integral hereditário para a tensão é

$$\sigma(t) = E(t) \varepsilon(0) + \int_0^t E(t - \tau) \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau. \quad (2.96)$$

Os integrais hereditários apenas requerem o conhecimento da função de fluência

(ou da função de relaxação). Não é necessário construir um modelo em termos de molas e amortecedores para estabelecer a função de fluência. Esta pode ser obtida através de dados experimentais. A formulação integral não é assim restrita a nenhuma combinação de molas e amortecedores em particular.

2.5 Aspectos algorítmicos

2.5.1 Função de relaxação

Equações como a Eq. (2.96) têm a propriedade inconveniente de se ter que memorizar todos os incrementos de deformação anteriores para calcular o novo incremento de tensão $\Delta\sigma$. Isto torna a computação muito pesada, pelo que a maioria dos programas de elementos finitos utilizam um algoritmo que é baseado numa expansão da função de relaxação $E(t - \tau, \tau)$, aqui considerando o envelhecimento. Matematicamente, (2.96) é uma transformada integral e $E(t - \tau, \tau)$ é conhecida como o núcleo da transformada. Com o objetivo de resolver numericamente o integral, é usual recorrer a uma expansão do núcleo numa série de polinómios ou de exponenciais de potências negativas, dando origem ao chamado núcleo degenerado. Por exemplo, se se expandir $E(t - \tau, \tau)$ numa série de Dirichlet, obtém-se

$$E(t - \tau, \tau) = E_\infty(\tau) + \sum_{\alpha=1}^N E_\alpha(\tau) \exp\left(-\frac{t - \tau}{\lambda_\alpha}\right). \quad (2.97)$$

Na Eq. (2.97) E_α tem a dimensão de rigidez e λ_α tem dimensão de tempo. Desprezando o possível efeito das deformações iniciais, a substituição da Eq. (2.97) em (2.96) dá então

$$\sigma(t) = \int_0^t \left[E_\infty(\tau) + \sum_{\alpha=1}^n E_\alpha(\tau) \exp\left(-\frac{t - \tau}{\lambda_\alpha}\right) \right] \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau. \quad (2.98)$$

Comparando agora a equação (2.98) com a Eq. (2.89), que é a função da resposta para um elemento de Maxwell, observa-se que a resposta (2.98) é exatamente a mesma que é obtida quando um arranjo paralelo de n elementos de Maxwell, cada um com o seu próprio tempo de relaxação λ_α e a sua própria rigidez da mola E_α , e um elemento de mola com rigidez E_∞ (Fig. 2.25a) são solicitados com o mesmo histórico de deformação $\varepsilon(\tau)$. Na Fig. 2.25a está representada a cadeia de Maxwell que pode ser derivada formalmente pela diferenciação de primeira ordem de ambos os lados da Eq. (2.98), ou seja,

$$\dot{\sigma}(t) = \frac{d}{dt} \left\{ \int_0^t \left[E_\infty(\tau) + \sum_{\alpha=1}^n E_\alpha(\tau) \exp\left(-\frac{t - \tau}{\lambda_\alpha}\right) \right] \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau \right\}. \quad (2.99)$$

Quando se define a tensão correspondente a cada elemento de Maxwell como

$$\sigma_{\alpha}(t) = \int_0^t E_{\alpha}(\tau) \exp\left(-\frac{t-\tau}{\lambda_{\alpha}}\right) \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau, \quad (2.100)$$

e posteriormente se troca a ordem integral/somatório, obtém-se

$$\dot{\sigma}(t) = E_{\infty}(t) \dot{\varepsilon}(t) + \sum_{\alpha=1}^n \dot{\sigma}_{\alpha}(t). \quad (2.101)$$

Finalmente, a regra de Leibnitz pode ser invocada para derivar a equação (2.100)

$$\dot{\sigma}_{\alpha}(t) = E_{\alpha}(t) \dot{\varepsilon}(t) - \frac{1}{\lambda_{\alpha}} \sigma_{\alpha}(t), \quad (2.102)$$

que dá precisamente a equação diferencial para um elemento de Maxwell, tal como a Eq. (2.10). Com esta derivação pode-se concluir que a expansão da função de relaxação em exponenciais de potência negativa (também denominada de série de Dirichlet) como na Eq. (2.97), pode ser interpretada no sentido físico como uma cadeia de Maxwell (atente-se ao somatório (2.101), que corresponde à associação em paralelo de (2.102)). De uma forma semelhante a esta derivação é possível demonstrar que a expansão da função de fluência numa série de Dirichlet, mecanicamente, resulta numa cadeia de Kelvin, isto é, um arranjo em série de elementos de Kelvin.

A Eq. (2.98) é um ponto de partida muito útil para o desenvolvimento de um algoritmo adequado a computações de grande escala, no sentido em que não é necessária a memorização do histórico de deformações completo para calcular um novo incremento de tensão. Em vez disso, conforme se verá na secção 2.5.3, a tensão no instante t pode ser calculada com base no incremento de deformação e num número *finito* de *variáveis estado*, as quais são conhecidas no instante atual, não sendo assim necessária a informação dos passos prévios.

Variáveis de estado são quantidades que descrevem o estado de um processo termo-mecânico, mas que não são diretamente mensuráveis. No presente caso, as variáveis de estado são as tensões nos elementos individuais da cadeia de Maxwell σ^{α} .

2.5.2 Função de fluência

À semelhança da função de relaxação, a função de fluência $J(t - \tau, \tau)$ pode ser expandida numa série de Dirichlet, obtendo-se

$$J(t - \tau, \tau) = \frac{1}{E_0(\tau)} + \sum_{\alpha=1}^n \frac{1}{E_{\alpha}(\tau)} \left[1 - \exp\left(-\frac{t-\tau}{\lambda_{J\alpha}}\right) \right]. \quad (2.103)$$

Na Eq. (2.103) E_α tem a dimensão de rigidez e $\lambda_{J\alpha}$ tem dimensão de tempo. Desprezando o possível efeito das tensões iniciais, a substituição da Eq. (2.103) em (2.95) fornece então

$$\varepsilon(t) = \int_0^t \left[\frac{1}{E_0(\tau)} + \sum_{\alpha=1}^n \frac{1}{E_\alpha(\tau)} \left[1 - \exp\left(-\frac{t-\tau}{\lambda_{J\alpha}}\right) \right] \right] \dot{\sigma}(\tau) d\tau. \quad (2.104)$$

A resposta da Eq. (2.104) é exatamente a mesma que é obtida quando um arranjo em série de n elementos de Kelvin, cada um com o seu próprio tempo de retardação $\lambda_{J\alpha}$ e a sua própria rigidez da mola E_α , e um corpo de Hooke com rigidez E_0 (Fig. 2.25b) são solicitados com o mesmo histórico de tensão $\sigma(\tau)$. Na Fig. 2.25b está ilustrada a cadeia de Kelvin que pode ser derivada formalmente pela diferenciação de primeira ordem de ambos os lados da Eq. (2.104), ou seja,

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{d}{dt} \left\{ \int_0^t \left[\frac{1}{E_0(\tau)} + \sum_{\alpha=1}^n \frac{1}{E_\alpha(\tau)} \left[1 - \exp\left(-\frac{t-\tau}{\lambda_{J\alpha}}\right) \right] \right] \dot{\sigma}(\tau) d\tau \right\}. \quad (2.105)$$

Se se definir a deformação no elemento de Kelvin como

$$\varepsilon_\alpha(t) = \int_0^t \frac{1}{E_\alpha(\tau)} \left[1 - \exp\left(-\frac{t-\tau}{\lambda_{J\alpha}}\right) \right] \dot{\sigma}(\tau) d\tau, \quad (2.106)$$

e posteriormente se troca a ordem integral/somatório, obtém-se

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\dot{\sigma}(t)}{E_0(\tau)} + \sum_{\alpha=1}^N \dot{\varepsilon}_\alpha(t). \quad (2.107)$$

Invocando a regra de Leibnitz para derivar a Eq (2.106) e manipulando algebricamente a equação obtém-se

$$\dot{\varepsilon}(t) = -\frac{\varepsilon(t)}{\lambda_{J\alpha}} + \frac{\sigma(t)}{\lambda_{J\alpha}E}. \quad (2.108)$$

À semelhança do caso da relaxação, a expansão da função de fluência em exponenciais de potência negativa como na Eq. (2.103), pode ser interpretada no sentido físico como uma cadeia de Kelvin (atente-se ao somatório (2.107), que corresponde à associação em paralelo de (2.108)).

A partir da Eq. (2.104) pode-se desenvolver um algoritmo que permita calcular um novo incremento de deformação sem que seja necessário memorizar o histórico de tensões. Como se verá na secção 2.5.4, a deformação no instante t poder calculada com base no incremento de tensão e num número finito de variáveis

de estado, as quais são conhecidas no instante atual, sem que seja necessária a informação dos passos anteriores. Neste caso, as variáveis de estado não têm significado físico.

2.5.3 Algoritmo incremental da modelação pelo modelo generalizado de Maxwell

Trocando a ordem integral/soma na Eq. (2.98), obtém-se

$$\sigma(t) = \int_0^t E_\infty(\tau) \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau + \sum_{\alpha=1}^n \int_0^t E_\alpha(\tau) \exp\left(-\frac{t-\tau}{\lambda_\alpha}\right) \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau. \quad (2.109)$$

Em seguida divide-se o intervalo de tempo em duas partes, uma de $\tau = 0$ até $\tau = t - \Delta t$ e outra de $\tau = t - \Delta t$ até $\tau = t$.

$$\sigma(t - \Delta t) = \int_0^{t-\Delta t} E_\infty(\tau) \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau + \sum_{\alpha=1}^n \int_0^{t-\Delta t} E_\alpha(\tau) \exp\left(-\frac{t-\Delta t-\tau}{\lambda_\alpha}\right) \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau. \quad (2.110)$$

Se subtrair este resultado nos dois lados da Eq. (2.109), obtém-se a seguinte relação incremental tensão-deformação:

$$\begin{aligned} \Delta\sigma = & \int_{t-\Delta t}^t E_\infty(\tau) \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau + \sum_{\alpha=1}^n \int_{t-\Delta t}^t E_\alpha(\tau) \exp\left(-\frac{t-\tau}{\lambda_\alpha}\right) \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau \\ & - \sum_{\alpha=1}^n \left[1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\lambda_\alpha}\right)\right] \sigma_\alpha(t - \Delta t). \end{aligned} \quad (2.111)$$

A obtenção da relação incremental anterior tomou em consideração que, para uma função exponencial genérica e^{-t} ,

$$e^{-t} = e^{-(t-\Delta t)-\Delta t} = e^{-(t-\Delta t)} e^{-\Delta t}. \quad (2.112)$$

Admitindo que a taxa de variação de deformação tem valor constante ao longo do intervalo de tempo, entre $(t - \Delta t)$ e t , com

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\Delta\varepsilon}{\Delta t}, \quad (2.113)$$

o integral na Eq. (2.111) pode ser resolvido de uma forma semi-analítica, como se segue:

$$\Delta\sigma = E_{\infty}(t^*) \Delta\varepsilon + \sum_{\alpha=1}^n \left[1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\lambda_{\alpha}}\right) \right] \left\{ \frac{E_{\alpha}(t^*)}{\frac{\Delta t}{\lambda_{\alpha}}} \Delta\varepsilon - \sigma_{\alpha}(t - \Delta t) \right\} \quad (2.114)$$

com $t - \Delta t \leq t^* \leq t$. Para materiais sem envelhecimento, isto é, se E_{α} não dependerem de τ , a integração é exata. A variável de estado σ_{α} corresponde à tensão do elemento de Maxwell α no passo de cálculo anterior e é obtida resolvendo o seguinte integral

$$\sigma_{\alpha}(t) = \int_0^t E_{\alpha} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\lambda_{\alpha}}\right) \dot{\varepsilon} d\tau, \quad (2.115)$$

ficando,

$$\sigma_{\alpha}(t) = \sigma_{\alpha}(t - \Delta t) \exp\left(-\frac{\Delta t}{\lambda_{\alpha}}\right) + \frac{E_{\alpha} \Delta\varepsilon \lambda_{\alpha}}{\Delta t} \left[1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\lambda_{\alpha}}\right) \right]. \quad (2.116)$$

Esta expressão permite que, em cada passo, não seja sempre necessária a integração a partir de $t = 0$. Basta o valor da variável de estado calculado no passo anterior para calcular o valor do passo atual.

Invertendo a Eq. (2.114) obtém-se a expressão que permite o cálculo do incremento de deformação em função da variação de tensão:

$$\Delta\varepsilon = \frac{\Delta\sigma + \sum_{\alpha=1}^n \left[1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\lambda_{\alpha}}\right) \right] \sigma_{\alpha}(t - \Delta t)}{E_{\infty}(t^*) + \sum_{\alpha=1}^n \left[1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\lambda_{\alpha}}\right) \right] \frac{E_{\alpha}(t^*)}{\frac{\Delta t}{\lambda_{\alpha}}}}. \quad (2.117)$$

As variações das tensões, no caso da relaxação, e as variações de deformações, no caso da fluência, dão-se a uma taxa de variação que diminui ao longo do tempo. Por essa razão, é vantajoso usar passos de tempo que aumentem progressivamente ao longo do tempo. Os passos de tempo devem ser escolhidos de modo a que se distribuam de uma forma regular ao longo da escala logarítmica. A melhor forma de o fazer é adotar um passo de cálculo que varie exponencialmente, por exemplo do tipo $\Delta t = 10^{1 \times i} - 10^{1 \times (i-1)}$, onde i é o número de passos de cálculo.

2.5.4 Validação do algoritmo incremental do modelo generalizado de Maxwell - relaxação

Considere-se um teste de relaxação no modelo sólido linear padrão no formato de Maxwell (Fig. 2.19) e a nomenclatura adotada na Fig. 2.25a. O modelo sólido linear padrão no formato de Maxwell constitui a forma mais simples do modelo

generalizado de Maxwell, pelo que na validação apenas é considerado um elemento de Maxwell do modelo generalizado de Maxwell. Durante um teste de relaxação a deformação mantém-se constante, pelo que a Eq. (2.114) fica:

$$\Delta\sigma = - \left(1 - \exp \left(\frac{-\Delta t}{\lambda_1} \right) \right) \sigma_1 (t - \Delta t). \quad (2.118)$$

Com objetivo de implementar o algoritmo da Eq. (2.118) numa rotina, considere-se que é imposta uma deformação constante ϵ_0 no instante inicial $T=0$. Na rotina da Fig. 2.27, o valor da tensão inicial no modelo sólido linear padrão no formato de Maxwell é resultante da ação das duas molas em simultâneo $S=\epsilon_0*(E_{inf}+E_1)$, onde E_{inf} é o módulo de elasticidade da mola isolada e E_1 é módulo de elasticidade da mola do elemento de Maxwell. O valor inicial da variável de estado S_1 representa a tensão inicial no elemento de Maxwell resultante da deformação inicial. Para cada passo de cálculo, o valor do incremento de tensão ΔS é calculado com recurso à Eq. (2.118) e o valor da variável de estado S_1 , que será utilizado no passo de cálculo seguinte, é calculado com a Eq. (2.116). O valor da tensão total S é atualizado com o valor do incremento de tensão ΔS e é armazenado numa matriz. São também calculados: a tensão na mola isolada S_{inf} , a deformação na mola isolada D_{inf} , a deformação na mola do elemento de Maxwell D_{1m} e a deformação no amortecedor do elemento de Maxwell D_{1a} . Repetindo este processo para todos os passos de cálculos desejados obtém-se a resposta do modelo ao ensaio de relaxação e a evolução das tensões e deformações nos elementos constituintes do modelo durante o ensaio.

A rotina da Fig. 2.27, redigida em linguagem MATLAB [64], tem como objetivo a validação do algoritmo incremental e a análise do comportamento do modelo durante um ensaio de relaxação.

O valor de entrada λ é o tempo de relaxação do elemento de Maxwell constituinte. O cálculo é efetuado num domínio de 100000 *dias*, com $E_{inf}=30 \times 10^3$ MPa, $E_1=30 \times 10^3$ MPa, $\lambda=1000$ *dias*, $\epsilon_0=1$ e são apresentados os resultados para dois passos de cálculo constantes na escala logarítmica, $\Delta t = 10^{0.5 \times i} - 10^{0.5 \times (i-1)}$ *dias* e $\Delta t = 10^{0.1 \times i} - 10^{0.1 \times (i-1)}$ *dias*.

Nas Figs. 2.28 e 2.30 apresentam-se os resultados obtidos. Para uma melhor compreensão do comportamento do modelo, nas Figs. 2.29a e 2.31a apresentam-se as evoluções da tensão nos componentes constituintes e nas Figs. 2.29b e 2.31b as evoluções da deformação dos mesmos.

No caso da relaxação, o modelo generalizado de Maxwell não produz erro (considerando os pressupostos subjacentes), pelo que os resultados são exatos.

```

function ten=relaxationSLSMaxwell(Einf,E1,lambda,e0)

n=12;
vdepS=zeros(n,1); vdepSinf=zeros(n,1);           %inicialização das matrizes
vdepS1=zeros(n,1); vdepDinf=zeros(n,1);
vdepD1m=zeros(n,1); vdepD1a=zeros(n,1);
T=zeros(n,1);

for i=2:n                                           %Matriz do tempo
    T(i,1) = 10^(.5*(i-2));
end
T(1,1)=0;                                         %Instante inicial

S=e0*(Einf+E1); vdepS(1,1)=S;                    %calculo da tensão inicial
S1=E1*e0; vdepS1(1,1)=S1;                        %Variável de estado inicial
Sinf=Einf*e0; vdepSinf(1,1)=Sinf;                 %Tensão na mola isolada
Dinf=e0; vdepDinf(1,1)=Dinf;
D1m=e0; vdepD1m(1,1)=D1m;
D1a=0; vdepD1a(1,1)=D1a;

for i=2:n
    dS=-(1-exp(-(T(i,1)-T(i-1))/lambda))*S1;      %Algoritmo incremental
                                                    %Atualização e armazenamento das variáveis:
    S=S+dS; vdepS(i,1)=S;                        %Tensão total
    Sinf=Einf*e0; vdepSinf(i,1)=Sinf;              %Tensão na mola isolada
    S1=S1*exp(-(T(i,1)-T(i-1))/lambda);           %Tensão no elemento de Maxwell
    vdepS1(i,1)=S1;
    vdepSexato(i,1)=Sexato;
    Dinf=e0; vdepDinf(i,1)=Dinf;                  %Deformação da mola isolada
    D1m=S1/E1; vdepD1m(i,1)=D1m;                  %Deformação na mola do elemento de Maxwell
    D1a=e0-D1m; vdepD1a(i,1)=D1a;                 %Deformação no amortecedor do elemento de Maxwell
end
ten=vdepS;                                         %Dados de saída
end

```

Figura 2.27: Rotina de implementação do algoritmo incremental para o caso simples de relaxação num sólido linear padrão no formato de Maxwell.

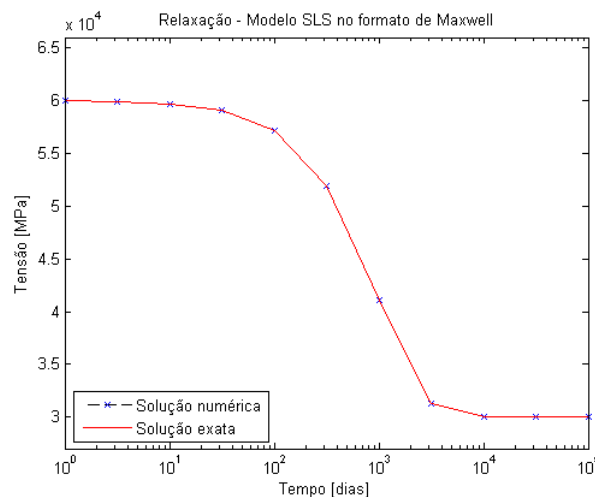


Figura 2.28: Resposta do sólido linear padrão no formato de Maxwell a um teste de relaxação com passos de cálculo $\Delta t = 10^{0.5 \times i} - 10^{0.5 \times (i-1)}$ dias.

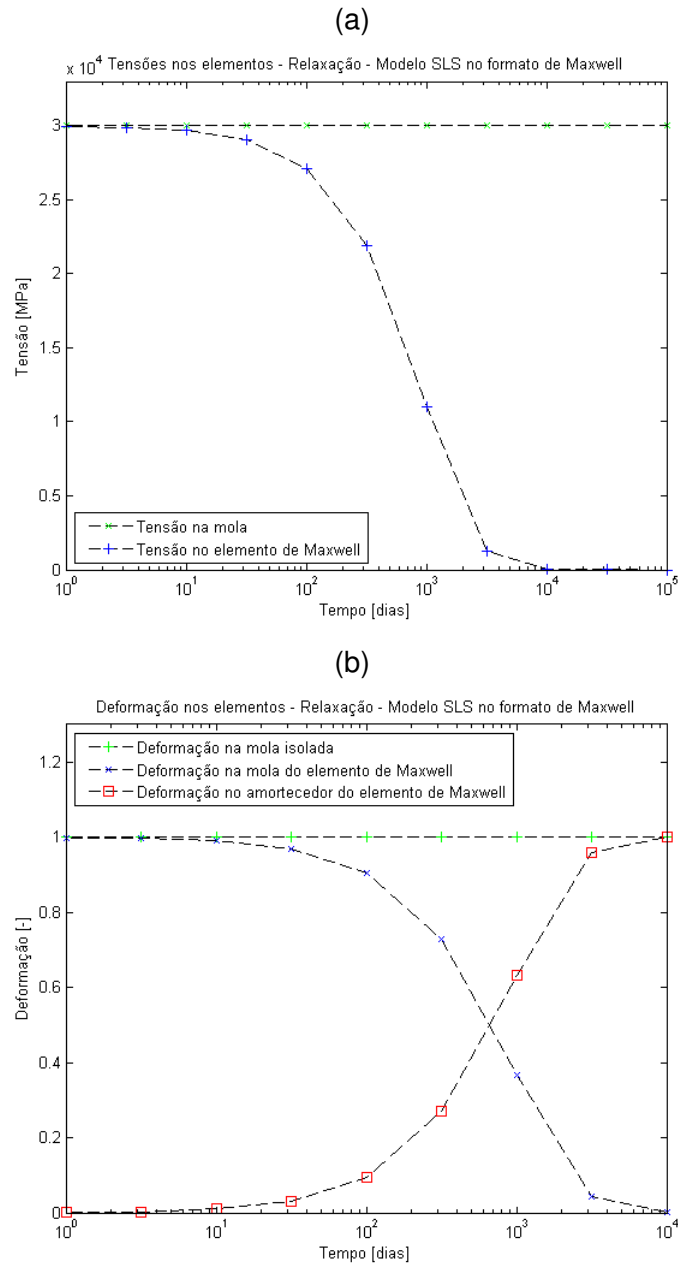


Figura 2.29: Resposta do sólido linear padrão no formato de Maxwell a um teste de relaxação com passos de cálculo $\Delta t = 10^{0.5 \times i} - 10^{0.5 \times (i-1)}$ dias: (a) Evolução da tensão nos componentes; (b) Evolução da deformação nos componentes;

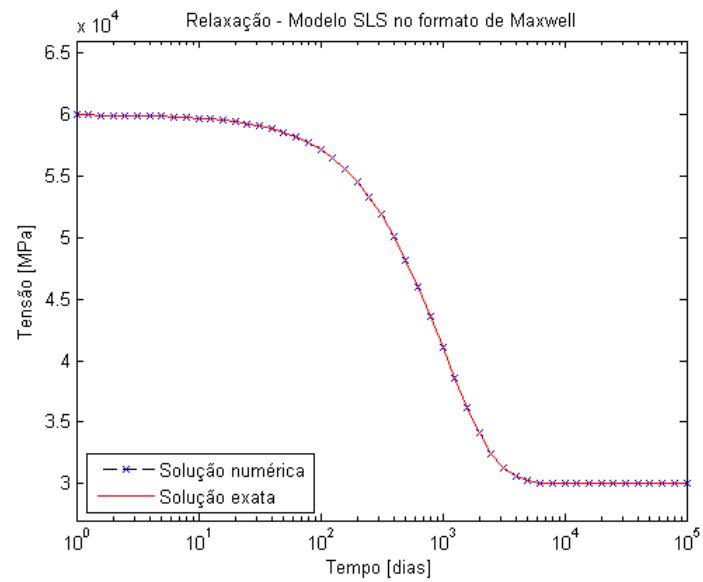


Figura 2.30: Resposta do sólido linear padrão no formato de Maxwell a um teste de relaxação com passos de cálculo $\Delta t = 10^{0.1 \times i} - 10^{0.1 \times (i-1)}$ dias.

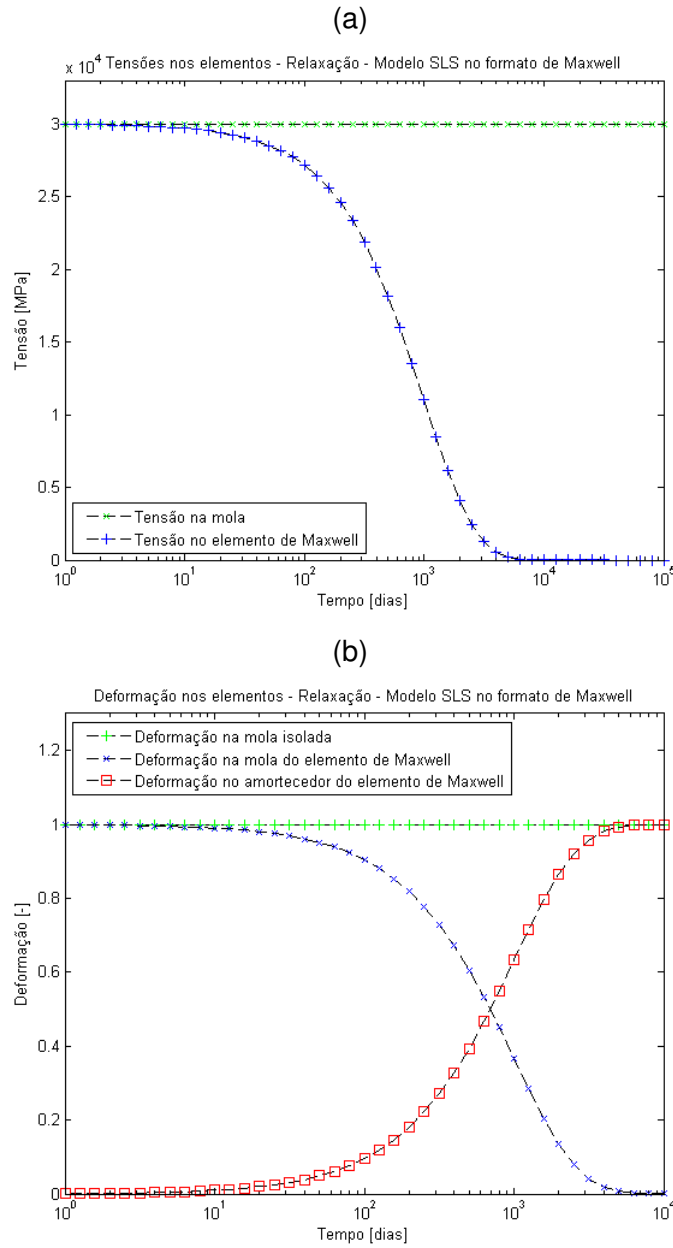


Figura 2.31: Resposta do sólido linear padrão no formato de Maxwell a um teste de relaxação com passos de cálculo $\Delta t = 10^{0.1 \times i} - 10^{0.1 \times (i-1)}$ dias: (a) Evolução da tensão nos componentes; (b) Evolução da deformação nos componentes;

2.5.5 Validação do algoritmo incremental do modelo generalizado de Maxwell - fluência

Considere-se agora um teste de fluência no modelo sólido linear padrão no formato de Maxwell (Fig. 2.19) e a nomenclatura adotada no caso anterior. Durante um teste de fluência a tensão mantém-se constante, pelo que a Eq. (2.117) fica:

$$\Delta \varepsilon = \frac{\left[1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\lambda_1}\right)\right] \sigma_1(t - \Delta t)}{E_\infty(t^*) + \left[1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\lambda_1}\right)\right] \frac{E_1(t^*)}{\frac{\Delta t}{\lambda_1}}} \quad (2.119)$$

A implementação da Eq. (2.119) numa rotina é muito semelhante ao que acontece no caso da relaxação. Se no instante inicial $T=0$ for imposta uma tensão constante ten0 , a deformação inicial no modelo sólido linear padrão no formato de Maxwell é a admitida pelas duas molas em paralelo, ou seja, $D=\text{ten0}/(E_{\text{inf}}+E_1)$, onde E_{inf} é o módulo de elasticidade da mola isolada e E_1 é o módulo de elasticidade da mola do elemento de Maxwell. O valor da variável de estado S_1 é igual ao valor da tensão no elemento de Maxwell e é calculado com a Eq. (2.116). Em cada passo de cálculo o valor do incremento de deformação dD é calculado com a Eq. (2.119) e o valor da variável de estado S_1 , que será utilizado no passo de cálculo seguinte, é calculado com a Eq. (2.116), sendo que neste caso a variação da deformação $\Delta \varepsilon$ não é nula e corresponde ao valor de dD . O valor da deformação total D é atualizado com o valor do incremento de deformação dD e é armazenado numa matriz. São também calculados: a tensão na mola isolada S_{inf} , a deformação na mola isolada D_{inf} , a deformação na mola do elemento de Maxwell D_{1m} , a deformação no amortecedor do elemento de Maxwell D_{1a} , a deformação total exata D_{exato} e o erro cometido no cálculo da deformação total v_{deperroD} . Os valores exatos são calculados com a Eq. (2.56), que é a função de fluência exata do modelo sólido linear padrão no formato de Maxwell. Repetindo este processo para todos os passos de cálculos desejados obtém-se a resposta do modelo ao ensaio de fluência e a evolução das tensões e deformações nos elementos constituintes do modelo durante o ensaio.

A rotina da Fig. 2.32, redigida em linguagem MATLAB, tem como objetivo a validação do algoritmo incremental e a análise do comportamento do modelo durante um ensaio de fluência.

A rotina apresentada tem os mesmos dados de entrada que a rotina da relaxação, exceto o valor da tensão inicial ten0 . O cálculo é efetuado com uma tensão inicial $\text{ten0} = 1\text{MPa}$, no mesmo domínio, com os mesmos passos de cálculo e com valores iguais para os restantes dados de entrada.

Nas Figs. 2.33a e 2.35a apresentam-se os resultados correspondentes ao ensaio de fluência, para os diferentes passos de cálculo, e nas Figs. 2.33b e 2.35b mostram-se os respetivos erros cometidos no cálculo. Nas Figs. 2.34a e 2.36a estão ilustradas as evoluções da deformação nos componentes do modelo e nas Figs. 2.34b e 2.36b as evoluções da tensão nos mesmos.

Neste caso, o modelo generalizado de Maxwell produz resultados aproximados.

```

function [def,errodef]=creepSLSMaxwell(Einf,E1,lambda,ten0)

n=12;
vdepD=zeros(n,1); vdepDinf=zeros(n,1); %inicialização das matrizes
vdepS1=zeros(n,1); vdepDexato=zeros(n,1);
vdeperroD=zeros(n,1); vdepSinf=zeros(n,1);
vdepD1m=zeros(n,1); vdepD1a=zeros(n,1);
T=zeros(n,1);

for i=2:n %Matriz dos incrementos do tempo
    T(i,1) = 10^(.5*(i-2));
end
T(1,1)=0; %Instante inicial

D=ten0/(Einf+E1); vdepD(1,1)=D; %Deformação inicial no sólido linear padrão
Dinf=D; vdepDinf(1,1)=Dinf; %Deformação inicial na mola isolada
Sinf=Dinf*Einf; vdepSinf(1,1)=Sinf; %Tensão inicial na mola isolada
D1m=D; vdepD1m(1,1)=D1m; %Deformação inicial na mola do elemento de Maxwell
S1=D1m*E1; vdepS1(1,1)=S1; %Tensão inicial na mola do elemento de Maxwell
D1a=0; vdepD1a(1,1)=D1a; %Deformação inicial no amortecedor do elemento de Maxwell
J0=1/(Einf+E1); %Valor da função de fluência exata inicial
Jinf=1/Einf; %Valor da função de fluência exata no infinito
lambdaJ=lambda*((Einf+E1)/Einf); %Valor do tempo de retardação
Dexato=(J0+(Jinf-J0)*(1-exp(-T(1,1)/lambdaJ)))*ten0;%Deformação total exata inicial
vdepDexato(1,1)=Dexato; vdeperroD(1,1)=D/Dexato-1;

for i=2:n
    %Implementação do algoritmo incremental
    denominador=(Einf+(1-exp(-(T(i,1)-T(i-1,1))/lambda))*E1*lambda/(T(i,1)-T(i-1,1)));
    dD=((1-exp(-(T(i,1)-T(i-1,1))/lambda))*S1)/denominador;
    %Atualização e armazenamento das variáveis:
    D=D+dD; vdepD(i,1)=D; %Deformação total
    Dinf=D; vdepDinf(i,1)=Dinf; %Deformação da mola isolada
    Sinf=Dinf*Einf; vdepSinf(i,1)=Sinf; %Tensão na mola isolada
    segundotermo=E1*dD*lambda*(1-exp(-(T(i,1)-T(i-1,1))/lambda))/(T(i,1)-T(i-1,1));
    S1=S1*exp(-(T(i,1)-T(i-1,1))/lambda)+segundotermo;
    vdepS1(i,1)=S1; %Tensão no elemento de Maxwell
    D1m=S1/E1; vdepD1m(i,1)=D1m; %Deformação na mola do elemento de Maxwell
    D1a=D-D1m; vdepD1a(i,1)=D1a; %Deformação no amortecedor do elemento de Maxwell
    Dexato=(J0+(Jinf-J0)*(1-exp(-T(i,1)/lambdaJ)))*ten0;
    vdepDexato(i,1)=Dexato; %Deformação total exata
    vdeperroD(i,1)=D/Dexato-1; %Erro da deformação
end
def=vdepD; %Dados de saída
errodef=vdeperroD;
end

```

Figura 2.32: Rotina de implementação do algoritmo incremental para o caso da fluência num sólido linear padrão no formato de Maxwell.

Analisando as Figs. 2.34a e 2.36a constata-se que o cálculo com o passo de cálculo mais refinado produz melhores resultados, e nas Figs. 2.34b e 2.36b verifica-se que os maiores erros ocorrem no mesmo intervalo do domínio e que a sua ordem de grandeza diminui quando o passo de cálculo é menor.

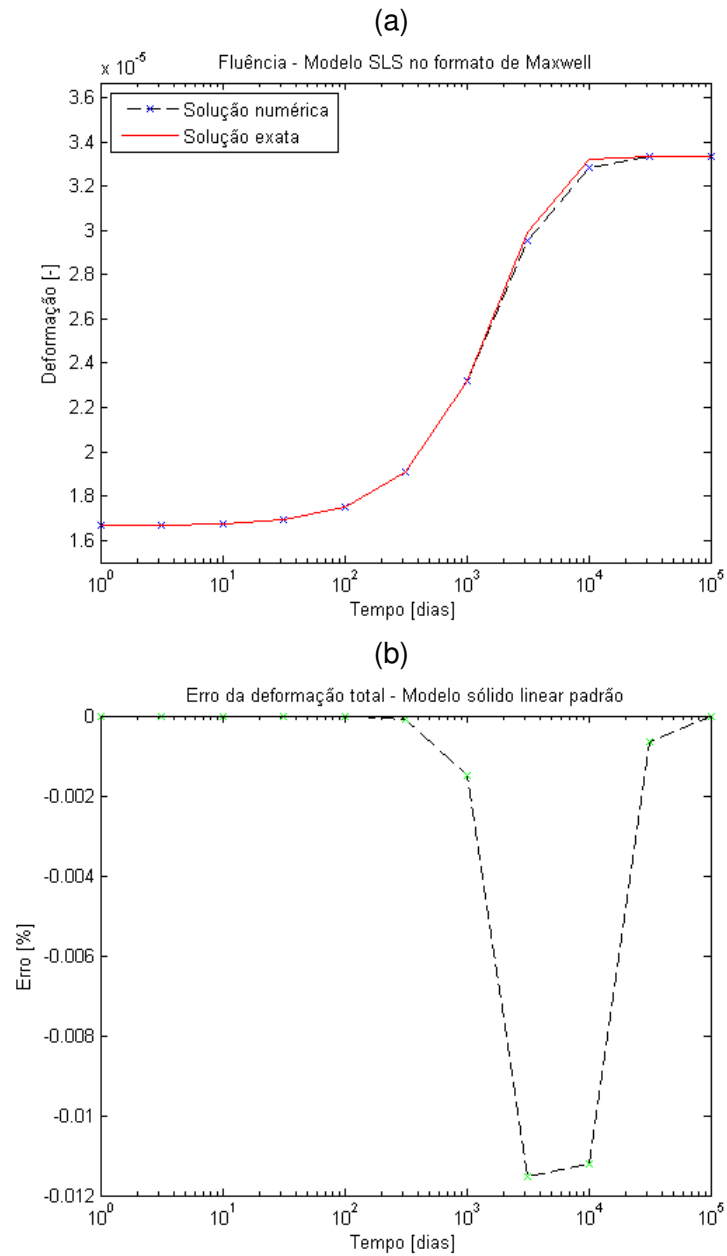


Figura 2.33: Resposta do sólido linear padrão no formato de Maxwell a um teste de fluência com passos de cálculo $\Delta t = 10^{0.5 \times i} - 10^{0.5 \times (i-1)}$ dias: (a) Deformação Total; (b) Erro da deformação total.

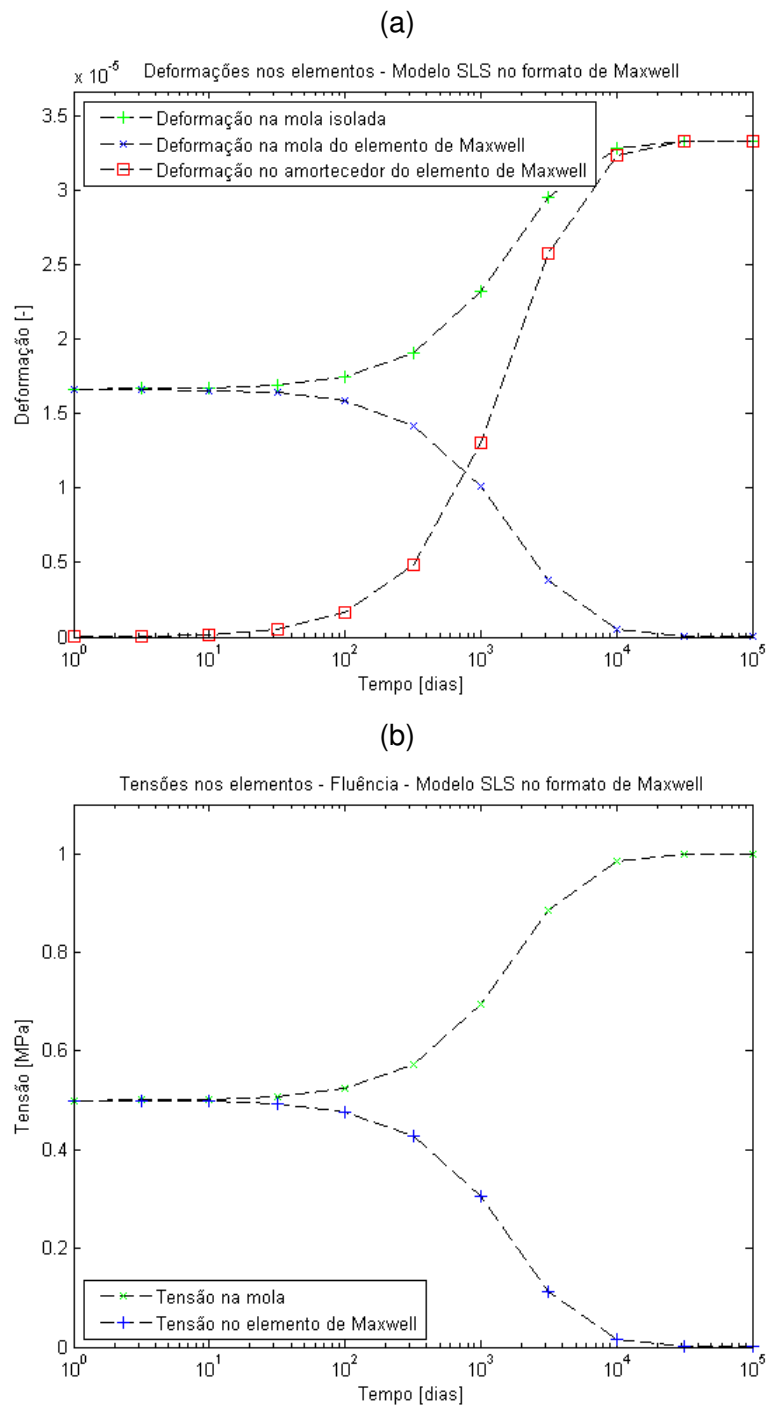


Figura 2.34: Resposta do sólido linear padrão no formato de Maxwell a um teste de fluência com passos de cálculo $\Delta t = 10^{0.5 \times i} - 10^{0.5 \times (i-1)}$ dias: (a) Evolução da deformação nos componentes; (b) Evolução da tensão nos componentes.

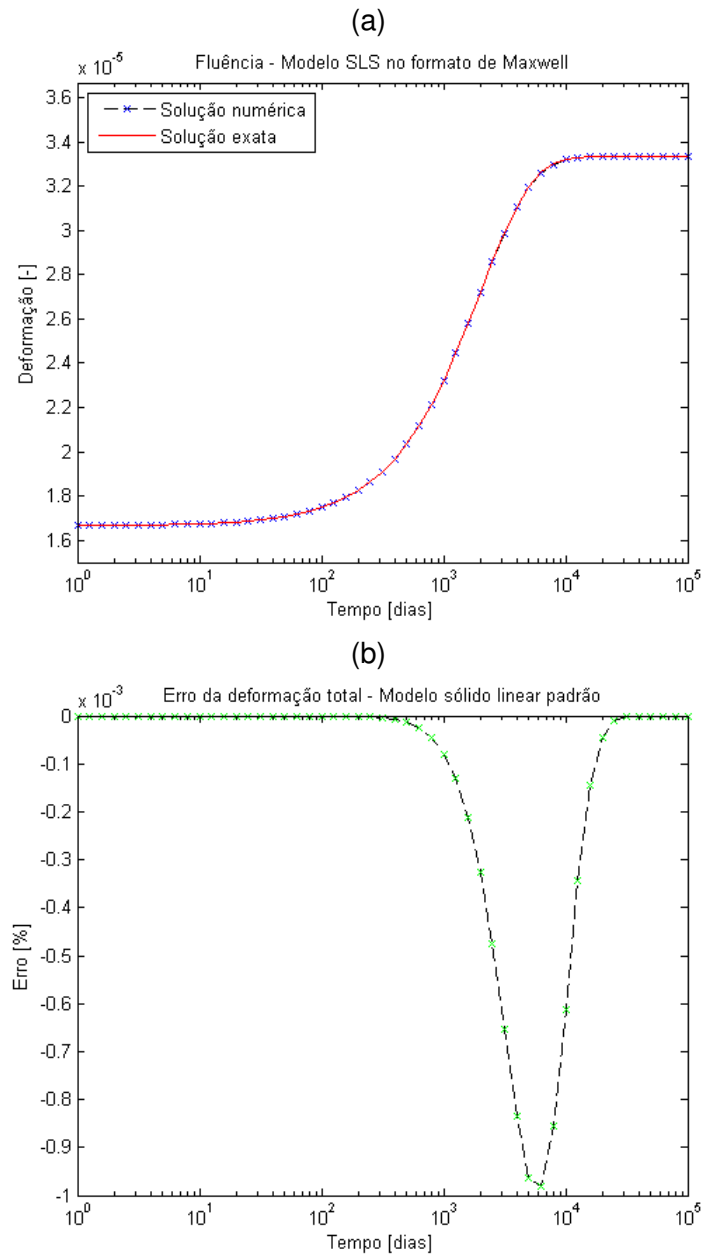


Figura 2.35: Resposta do sólido linear padrão no formato de Maxwell a um teste de fluência com passos de cálculo $\Delta t = 10^{0.1 \times i} - 10^{0.1 \times (i-1)}$ dias: (a) Deformação Total; (b) Erro da deformação total.

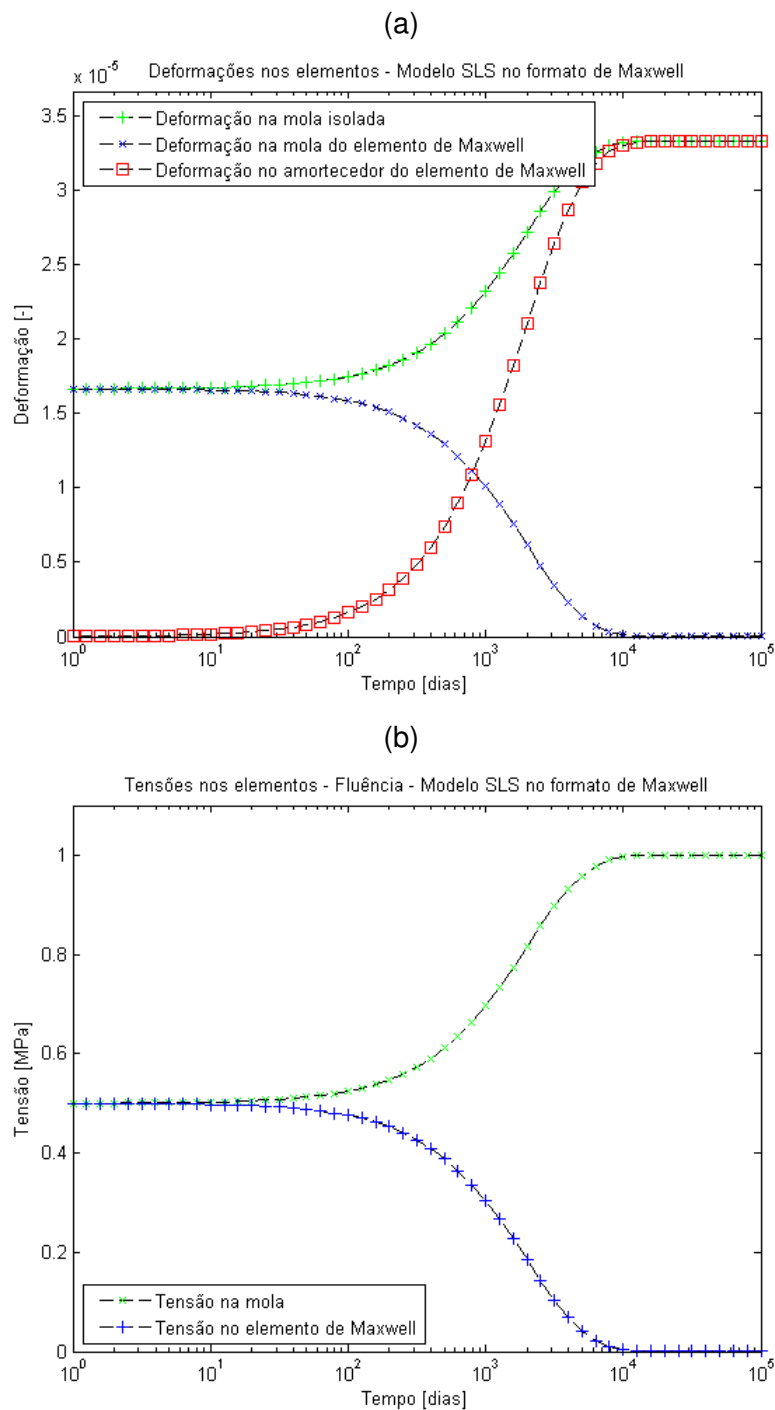


Figura 2.36: Resposta do sólido linear padrão no formato de Maxwell a um teste de fluência com passos de cálculo $\Delta t = 10^{0.1 \times i} - 10^{0.1 \times (i-1)}$ dias: (a) Evolução da deformação nos componentes; (b) Evolução da tensão nos componentes.

2.5.6 Algoritmo incremental da modelação pelo modelo generalizado de Kelvin

Da Eq. (2.104) obtém-se

$$\varepsilon(t) = \int_0^t \frac{\dot{\sigma}(\tau)}{E_0(\tau)} d\tau + \sum_{\alpha=1}^n \int_0^t \frac{1}{E_{\alpha}(\tau)} \left[1 - \exp\left(-\frac{t-\tau}{\lambda_{J\alpha}}\right) \right] \dot{\sigma}(\tau) d\tau. \quad (2.120)$$

Dividindo o intervalo de tempo em duas partes, de $\tau = 0$ até $\tau = t - \Delta t$ e de $\tau = t - \Delta t$ até $\tau = t$, tem-se

$$\varepsilon(t - \Delta t) = \int_0^{t-\Delta t} \frac{\dot{\sigma}(\tau)}{E_0(\tau)} d\tau + \sum_{\alpha=1}^n \int_0^{t-\Delta t} \frac{1}{E_{\alpha}(\tau)} \left[1 - \exp\left(-\frac{t-\Delta t-\tau}{\lambda_{J\alpha}}\right) \right] \dot{\sigma}(\tau) d\tau. \quad (2.121)$$

Subtraindo a Eq. (2.121) dos dois lados da Eq. (2.120) obtém-se a seguinte relação incremental:

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon = & \int_{t-\Delta t}^t \frac{\dot{\sigma}(\tau)}{E_0(\tau)} d\tau + \sum_{\alpha=1}^n \int_{t-\Delta t}^t \frac{\dot{\sigma}(\tau)}{E_{\alpha}(\tau)} d\tau - \sum_{\alpha=1}^n \int_{t-\Delta t}^t \frac{\dot{\sigma}(\tau)}{E_{\alpha}(\tau)} e^{-\frac{t-\tau}{\lambda_{J\alpha}}} d\tau \\ & + \sum_{\alpha=1}^n \int_0^{t-\Delta t} \frac{\dot{\sigma}(\tau)}{E_{\alpha}(\tau)} e^{-\frac{t-\Delta t-\tau}{\lambda_{J\alpha}}} \left[1 - e^{-\frac{\Delta t}{\lambda_{J\alpha}}} \right] d\tau. \end{aligned} \quad (2.122)$$

Admitindo que a taxa de variação da tensão é constante ao longo do intervalo de tempo, entre $(t - \Delta t)$ e t , com

$$\dot{\sigma} = \frac{\Delta\sigma}{\Delta t}, \quad (2.123)$$

o integral da Eq. (2.122) pode ser resolvido de uma forma semi-analítica, ficando

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon = & \frac{\Delta\sigma}{E_0(t^*)} + \sum_{\alpha=1}^n \frac{\Delta\sigma}{E_{\alpha}(t^*)} \left[1 - \frac{\lambda_{J\alpha}}{\Delta t} \left(1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\lambda_{J\alpha}}\right) \right) \right] \\ & + \sum_{\alpha=1}^n \varepsilon_{\alpha}^*(t - \Delta t) \left(1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\lambda_{J\alpha}}\right) \right), \end{aligned} \quad (2.124)$$

em que ε_{α}^* é uma variável de estado e é obtida resolvendo o seguinte integral,

$$\varepsilon_{\alpha}^*(t) = \int_0^t \frac{\dot{\sigma}(\tau)}{E_{\alpha}(\tau)} e^{-\frac{t-\tau}{\lambda_{J\alpha}}} d\tau = \int_0^{t-\Delta t} \frac{\dot{\sigma}(\tau)}{E_{\alpha}(\tau)} e^{-\frac{t-\tau}{\lambda_{J\alpha}}} d\tau + \int_{t-\Delta t}^t \frac{\dot{\sigma}(\tau)}{E_{\alpha}(\tau)} e^{-\frac{t-\tau}{\lambda_{J\alpha}}} d\tau, \quad (2.125)$$

ficando,

$$\varepsilon_{\alpha}^*(t) = \varepsilon_{\alpha}^*(t - \Delta t) \exp\left(-\frac{\Delta t}{\lambda_{J\alpha}}\right) + \frac{\Delta\sigma \lambda_{J\alpha}}{\Delta t E_{\alpha}(t^*)} \left[1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\lambda_{J\alpha}}\right)\right], \quad (2.126)$$

com

$$\varepsilon_{\alpha}^*(t_1) = \frac{\Delta\sigma(t_1)}{E_{\alpha}(t_1)}. \quad (2.127)$$

Invertendo a Eq. (2.124) obtém-se a expressão que permite o cálculo do incremento de tensão em função da variação da deformação:

$$\Delta\sigma = \frac{\Delta\varepsilon - \sum_{\alpha=1}^N \varepsilon_{\alpha}^*(t - \Delta t) \left(1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\lambda_{J\alpha}}\right)\right)}{\frac{1}{E_0(t^*)} + \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{E_{\alpha}(t^*)} \left[1 - \frac{\lambda_{J\alpha}}{\Delta t} \left(1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\lambda_{J\alpha}}\right)\right)\right]}. \quad (2.128)$$

2.5.7 Validação do algoritmo incremental do modelo generalizado de Kelvin - fluência

Considere-se um ensaio de fluência no modelo sólido linear padrão no formato de Kelvin (Fig. 2.22) e a nomenclatura adotada na Fig. 2.25b. O modelo sólido linear padrão no formato de Kelvin constitui a forma mais simples do modelo generalizado de Kelvin, pelo que se considera apenas um elemento de Kelvin no modelo generalizado de Kelvin. Durante um teste de fluência a tensão mantém-se constante e portanto a Eq. (2.124) fica:

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon_1^*(t - \Delta t) \left(1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\lambda_{J1}}\right)\right). \quad (2.129)$$

Admita-se que é imposta uma tensão constante t_{en0} no instante inicial $T=0$ no modelo sólido linear padrão no formato de Kelvin. A rotina da Fig. 2.37 permite calcular a fluência no modelo sólido linear padrão no formato de Kelvin com recurso ao algoritmo do modelo generalizado de Kelvin. No instante inicial a resposta à tensão inicial imposta irá ser assumida pela mola isolada, pelo que a deformação inicial do modelo será $D=t_{en0}/E_0$, onde E_0 é o módulo de elasticidade da mola isolada. O valor inicial da variável de estado v_{estado} é calculado com a Eq. (2.127). Em cada passo de cálculo é calculado o valor do incremento

de deformação dD com a Eq. (2.129) e o valor da variável de estado $vestado$ com a Eq. (2.126) mas, neste caso, a variação da tensão $\Delta\sigma$ é nula. O valor da deformação total D é atualizado com o valor do incremento de tensão dD e armazenado numa matriz. São também calculados: a tensão na mola isolada $S0$, a deformação na mola isolada $D0$, a deformação no elemento de Kelvin $D1$, a tensão na mola do elemento de Kelvin $S1m$ e a tensão no amortecedor do elemento de Kelvin $S1a$. A repetição deste processo para todos os passos de cálculos permite obtenção da resposta do modelo ao ensaio de fluência e a evolução das tensões e deformações nos elementos constituintes durante o ensaio.

A rotina da Fig. 2.37, redigida em linguagem MATLAB, tem a função de validar o algoritmo e analisar o comportamento do modelo durante um ensaio de fluência.

```
function def=creepSLSKelvin(E0,E1,lambdaj,ten0)

n=12; %Inicialização das matrizes
vdepD=zeros(n,1); vdepD0=zeros(n,1);
vdepD1=zeros(n,1); vdepS0=zeros(n,1);
vdepS1a=zeros(n,1); vdepS1m=zeros(n,1);
T=zeros(n,1);

for i=2:n %Matriz dos incrementos do tempo
    T(i,1) = 10^(.5*(i-2));
end
T(1,1)=0; %Instante inicial

D=ten0/E0; vdepD(1,1)=D; %Valores iniciais das variáveis:
vestado=ten0/E1; %Deformação total
D0=D; vdepD0(1,1)=D0; %Variável de estado
S0=ten0; vdepS0(1,1)=S0; %Deformação na mola isolada
D1=0; vdepD1(1,1)=D1; %Tensão na mola isolada
S1a=ten0; vdepS1a(1,1)=S1a; %Deformação no elemento de Kelvin
S1m=0; vdepS1m(1,1)=S1m; %Tensão no amortecedor do elemento de Kelvin

for i=2:n
    dD=vestado*(1-exp(-(T(i,1)-T(i-1,1))/lambdaj)); %Algoritmo incremental
    %Atualização e armazenamento das variáveis:
    D=D+dD; vdepD(i,1)=D; %Deformação total
    vestado=vestado*exp(-(T(i,1)-T(i-1,1))/lambdaj); %Variável de estado
    D0=ten0/E0; vdepD0(i,1)=D0; %Deformação na mola isolada
    S0=ten0; vdepS0(i,1)=S0; %Tensão na mola isolada
    D1=D-D0; vdepD1(i,1)=D1; %Deformação no elemento de Kelvin
    S1m=D1*E1; vdepS1m(i,1)=S1m; %Tensão na mola do elemento de Kelvin
    S1a=ten0-S1m; vdepS1a(i,1)=S1a; %Tensão no amortecedor do elemento de Kelvin
end
def=vdepD; %Dados de saída
end
```

Figura 2.37: Rotina de implementação do algoritmo incremental para o caso da fluência num sólido linear padrão no formato de Kelvin.

Neste caso, o valor de entrada λ corresponde ao valor do tempo de retardação do elemento de Kelvin pertencente ao modelo sólido linear padrão no formato de Kelvin. O domínio de cálculo é de 100000 *dias* e os passos utilizados são $\Delta t = 10^{0.5 \times i} - 10^{0.5 \times (i-1)}$ *dias* e $\Delta t = 10^{0.1 \times i} - 10^{0.1 \times (i-1)}$ *dias*. Os valores de entrada são: $E0=30 \times 10^3$ MPa, $E1=30 \times 10^3$ MPa, $\lambda=1000$ *dias*, $\sigma_0=1$ MPa.

Nas Figs. 2.38 e 2.40 apresentam-se os resultados obtidos. Para uma melhor compreensão do comportamento do modelo, nas Figs. 2.39a e 2.41a

apresentam-se as evoluções da deformação nos componentes constituintes e nas Figs. 2.39b e 2.41b as evoluções da tensão dos mesmos.

Inversamente ao modelo generalizado de Maxwell, o modelo generalizado de Kelvin produz resultados exatos (considerando os pressupostos subjacentes) no cálculo da fluência.

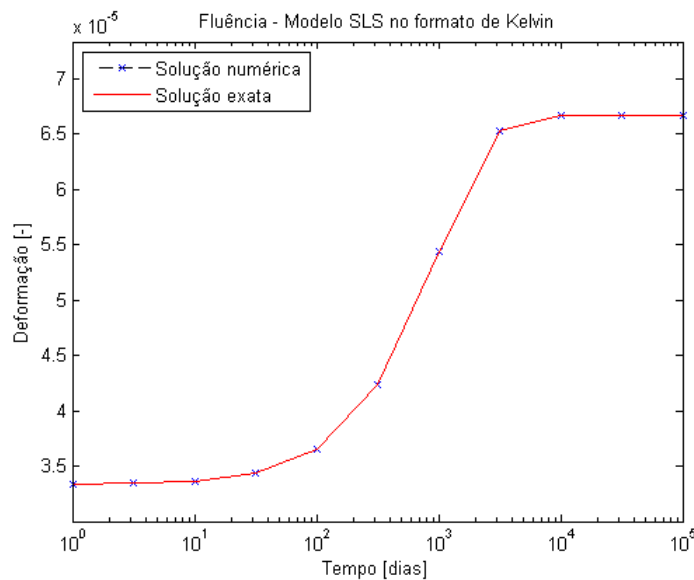


Figura 2.38: Resposta do sólido linear padrão no formato de Kelvin a um teste de fluência com passos de cálculo $\Delta t = 10^{0.5 \times i} - 10^{0.5 \times (i-1)}$ dias.

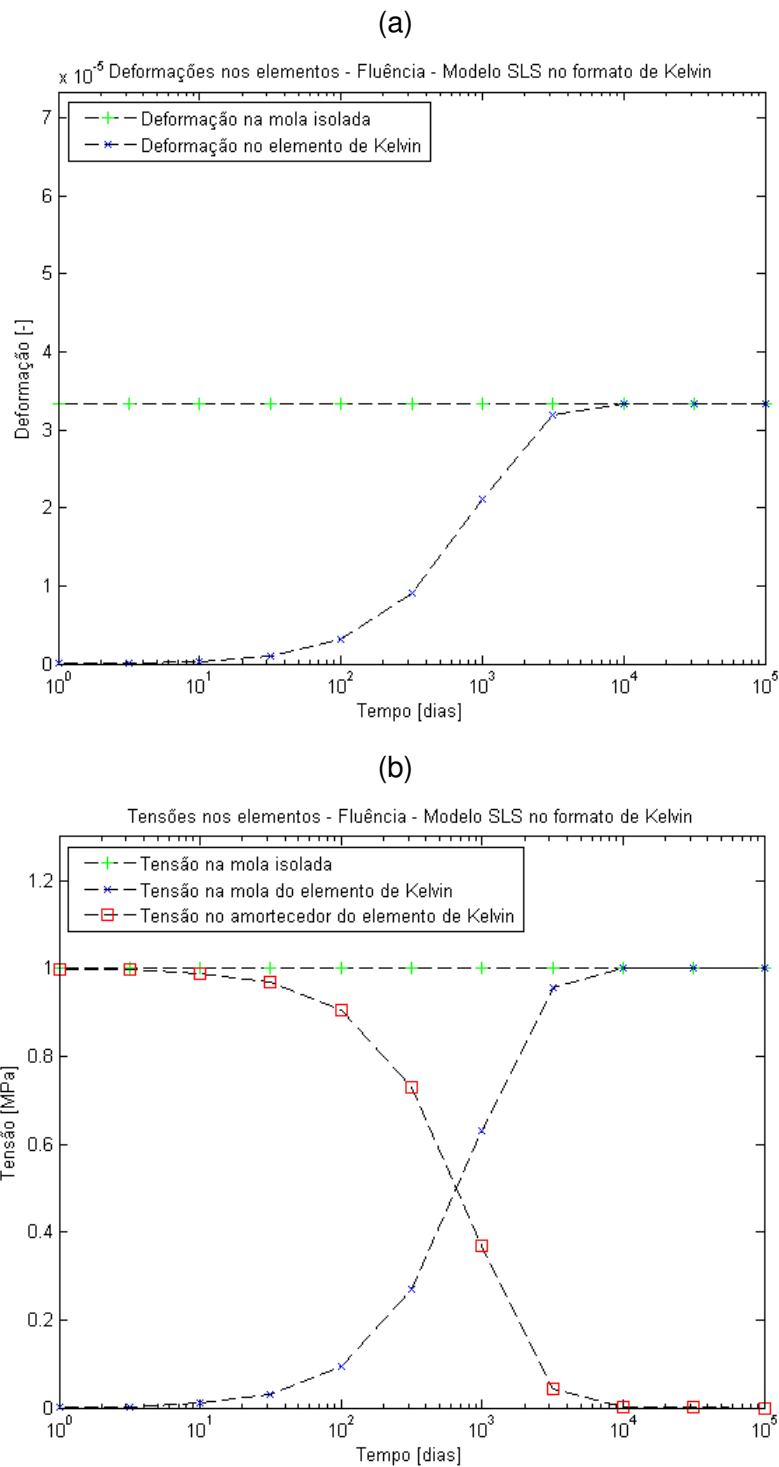


Figura 2.39: Resposta do sólido linear padrão no formato de Kelvin a um teste de fluência com passos de cálculo $\Delta t = 10^{0.5 \times i} - 10^{0.5 \times (i-1)}$ dias: (a) Evolução da deformação nos componentes; (b) Evolução da tensão nos componentes.

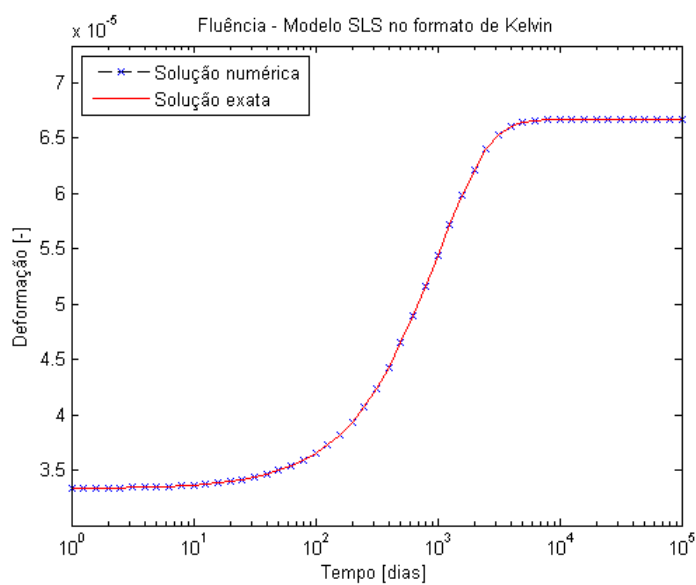


Figura 2.40: Resposta do sólido linear padrão no formato de Kelvin a um teste de fluência com passos de cálculo $\Delta t = 10^{0.1 \times i} - 10^{0.1 \times (i-1)}$ dias.

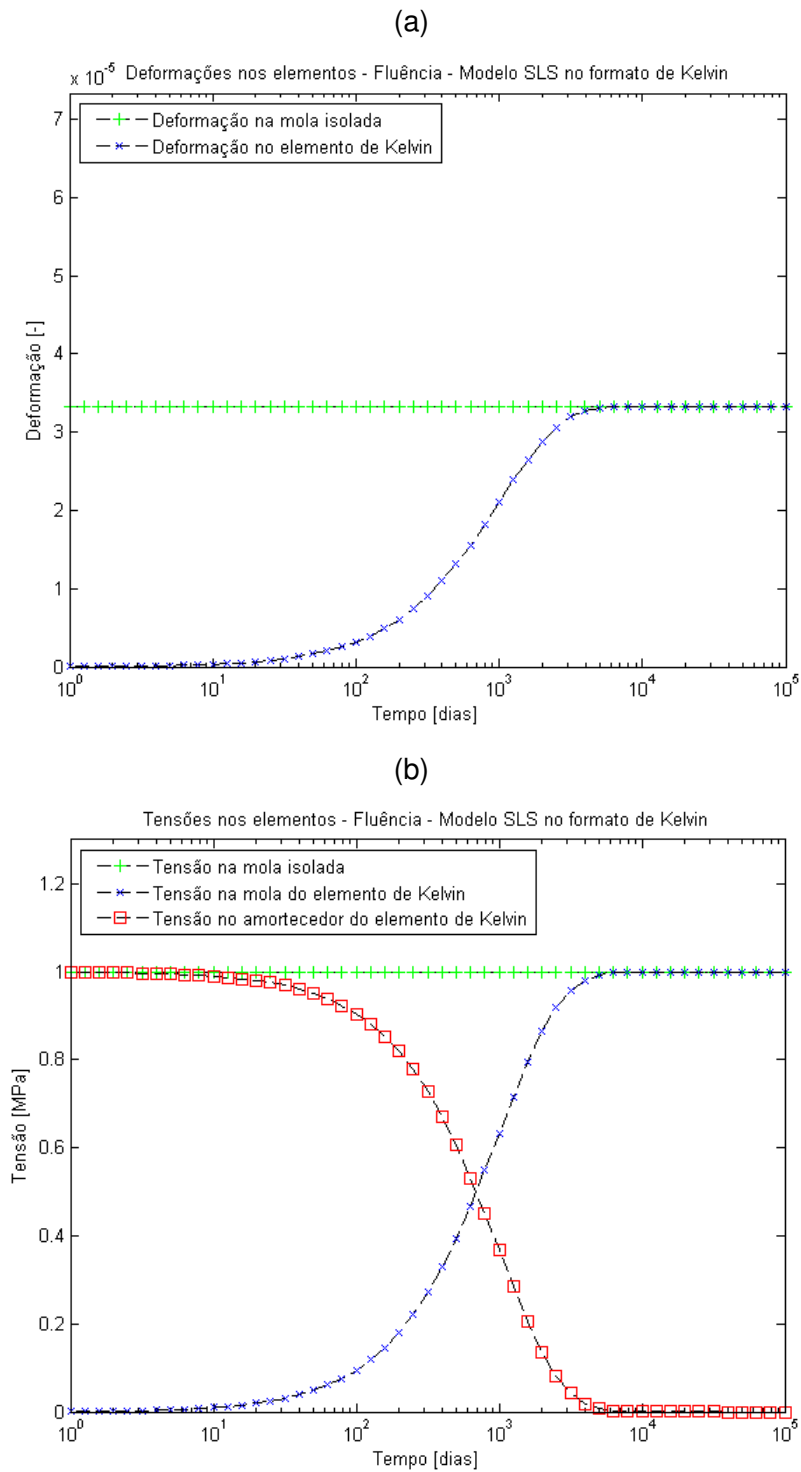


Figura 2.41: Resposta do sólido linear padrão no formato de Kelvin a um teste de fluência com passos de cálculo $\Delta t = 10^{0.1 \times i} - 10^{0.1 \times (i-1)}$ dias: (a) Evolução da deformação nos componentes; (b) Evolução da tensão nos componentes.

2.5.8 Validação do algoritmo incremental do modelo generalizado de Kelvin - relaxação

Considere-se um ensaio de relaxação no modelo sólido linear padrão no formato de Kelvin (Fig. 2.22) e a nomenclatura adotada na Fig. 2.25b. Durante um teste de fluência a deformação mantém-se constante, pelo que a Eq. (2.128) fica:

$$\Delta\sigma = - \frac{\varepsilon_1^* (t - \Delta t) \left(1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\lambda_{J1}}\right) \right)}{\frac{1}{E_0} + \frac{1}{E_1} \left[1 - \frac{\lambda_{J1}}{\Delta t} \left(1 - \exp\left(-\frac{\Delta t}{\lambda_{J1}}\right) \right) \right]}. \quad (2.130)$$

A rotina 2.42 permite o cálculo da relaxação com o algoritmo do modelo generalizado de Kelvin (Eq. (2.130)). Considere-se que no instante inicial $T=0$ é imposta uma deformação constante ε_0 . A tensão inicial no modelo sólido linear padrão no formato de Kelvin é a admitida pela mola isolada $D=\varepsilon_0 \cdot E_0$, onde E_0 é o módulo de elasticidade da mola isolada. Recorrendo à Eq. (2.127) é calculado o valor da variável de estado vestado . Em cada passo de cálculo o valor do incremento de tensão Δs é calculado com a Eq. (2.130) e o valor da variável de estado vestado , que será utilizado no passo de cálculo seguinte, é calculado com a Eq. (2.126). Neste caso a variação da tensão $\Delta\sigma$ não é nula e corresponde ao valor de Δs . O valor da tensão total s é atualizado com o valor do incremento de tensão Δs e é armazenado numa matriz. São também calculados: a tensão na mola isolada s_0 , a deformação na mola isolada D_0 , a deformação no elemento de Kelvin D_1 , a tensão na mola do elemento de Kelvin s_{1m} , a tensão no amortecedor do elemento de Kelvin s_{1a} , a tensão total exata s_{exato} e o erro cometido no cálculo da tensão total vdeperroS . Os valores exatos da deformação são calculados com recurso à função exata da relaxação do modelo sólido linear padrão no formato de Kelvin, deduzida anteriormente ((2.74)).

A rotina da Fig. 2.42, redigida em MATLAB, tem a função de validar o algoritmo e analisar o comportamento do modelo durante um ensaio de fluência.

O cálculo desta rotina é efetuado com os mesmos dados da rotina anterior, com a exceção da deformação inicial, que é $\varepsilon_0 = 1$.

Tal como no caso da fluência, a rotina apresentada faz o cálculo para um domínio de 100000 dias e com passos de cálculo constante em escala logarítmica do tipo $\Delta t = 10^{0.5 \times i} - 10^{0.5 \times (i-1)}$ dias. Os dados de entrada são: E_0 e E_1 são os módulos de elasticidade da mola isolada e do elemento de Kelvin que compõem o sólido linear padrão no formato de Kelvin respetivamente, λ_{J1} é o tempo de retardação do elemento de Kelvin constituinte, ten_0 é a tensão inicial. E tem como dados de saída: a matriz da tensão total no modelo ten e a matriz do erro da tensão erroten .

Nas Figs. 2.43a e 2.45a apresentam-se os resultados correspondentes ao ensaio de relaxação, para os diferentes passos de cálculo, e nas Figs. 2.43b e 2.45b os respetivos erros cometidos no cálculo. Nas Figs. 2.44a e 2.46a está ilustrada as evoluções da tensão nos componentes do modelo e nas Figs. 2.44b e 2.46b as evoluções da deformação nos mesmos.

```

function [ten,erroten]=relaxationSLSKelvin(E0,E1,lambda,j,e0)

n=12;
vindep=zeros(n,1); vdepS=zeros(n,1); %inicialização das matrizes
vdepS0=zeros(n,1); vdepD0=zeros(n,1);
vdepD1=zeros(n,1); vdepS1m=zeros(n,1);
vdepS1a=zeros(n,1); T=zeros(n,1);

for i=2:n %Matriz do tempo
    T(i,1) = 10^(.5*(i-2));
    vindep(i,1)=T(i,1);
end
T(1,1)=0; vindep(1,1)=T(1,1); %Instante inicial

S=e0*E0; vdepS(1,1)=S; %Valores iniciais das variaveis:
vestado=S/E1; %Tensão total
S0=S; vdepS0(1,1)=S0; %Variável de estado
D0=e0; vdepD0(1,1)=D0; %Tensão na mola isolada
D1=0; vdepD1(1,1)=D1; %Deformação na mola isolada
S1m=0; vdepS1m(1,1)=S1m; %Deformação no elemento de Kelvin
S1a=S; vdepS1a(1,1)=S1a; %Tensão na mola do elemento de Kelvin
Einf=E0*E1/(E0+E1); %Tensão no amortecedor do elemento de Kelvin
lambda=lambda*j*E1/(E0+E1); %Função de relaxação exacta no infinito
Sexato=e0*(Einf+(E0-Einf)*exp(-T(1,1)/lambda)); %tempo de relaxação
vdepSexato=Sexato; vdeperroS(1,1)=S/Sexato-1; %Função de relaxação exacta
%Erro da tensão total

for i=2:n %Algoritmo incremental
    d=(1/E0+(1/E1)*(1-(lambda*j/(T(i,1)-T(i-1,1))))*(1-exp(-(T(i,1)-T(i-1,1))/lambda)))));
    dS=-vestado*(1-exp(-(T(i,1)-T(i-1,1))/lambda))/d; %Actualização e armazenamento das variáveis:
    S=S+dS; vdepS(i,1)=S; %Tensão total
    resto=dS*lambda*j*(1-exp(-(T(i,1)-T(i-1,1))/lambda))/(E1*(T(i,1)-T(i-1,1)));
    vestado=vestado*exp(-(T(i,1)-T(i-1,1))/lambda)+resto; %Variável de estado
    S0=S; vdepS0(i,1)=S0; %Tensão na mola isolada
    D0=S0/E0; vdepD0(i,1)=D0; %Deformação na mola isolada
    D1=e0-D0; vdepD1(i,1)=D1; %Deformação no elemento de Kelvin
    S1m=D1*E1; vdepS1m(i,1)=S1m; %Tensão na mola do elemento de Kelvin
    S1a=S-S1m; vdepS1a(i,1)=S1a; %Tensão no amortecedor do elemento de Kelvin
    Sexato=e0*(Einf+(E0-Einf)*exp(-T(i,1)/lambda)); %Tensão total exacta
    vdepSexato(i,1)=Sexato;
    vdeperroS(i,1)=S/Sexato-1; %Erro da tensão
end
ten=vdepS; %Dados de saída
erroten=vdeperroS;
end

```

Figura 2.42: Rotina de implementação do algoritmo incremental para o caso da fluência num sólido linear padrão no formato de Kelvin.

Novamente, ao contrário do que acontece com o modelo generalizado de Maxwell, o modelo generalizado de Kelvin fornece resultados aproximados no cálculo da relaxação. Com o passo de cálculo mais refinado obtém-se melhores resultados. Das Figs. 2.44b e 2.46b pode-se concluir que, para o passo de cálculo mais refinado, a grandeza do erro é menor e que os valores mais relevantes do erro ocorrem no mesmo intervalo do domínio.

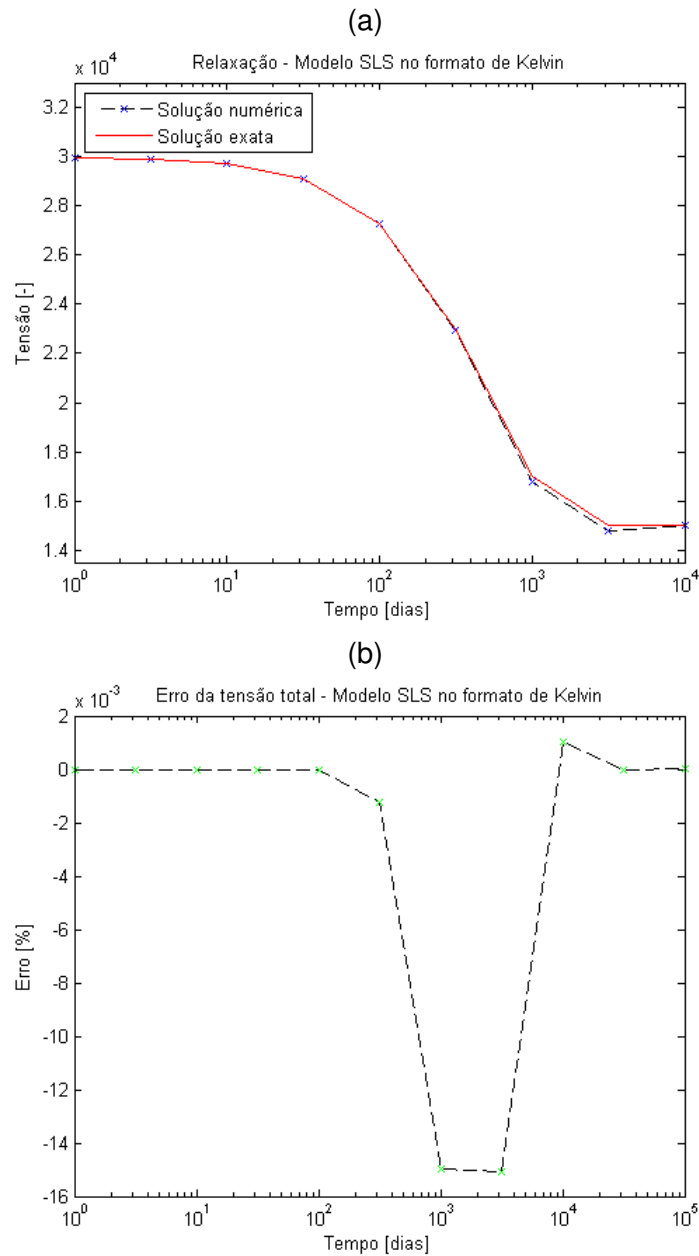


Figura 2.43: Resposta do sólido linear padrão no formato de Kelvin a um teste de relaxação com passos de cálculo $\Delta t = 10^{0.5 \times i} - 10^{0.5 \times (i-1)}$ dias: (a) Tensão total; (b) Erro da tensão total.

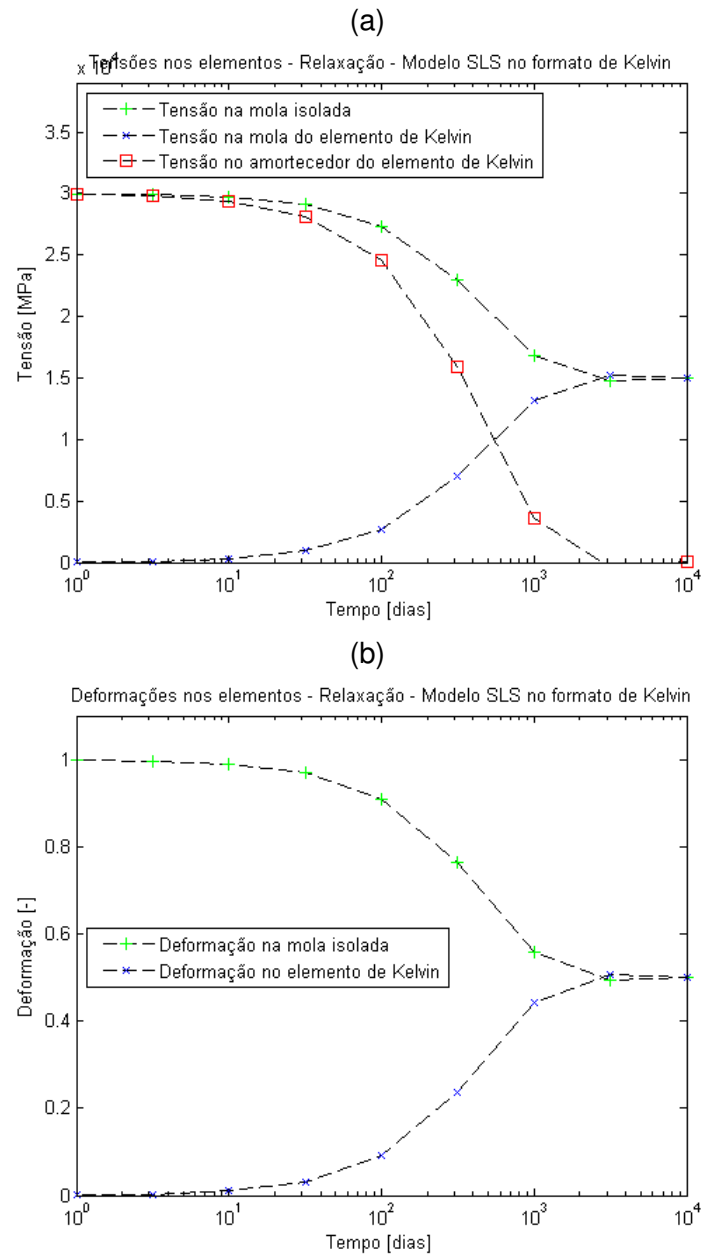


Figura 2.44: Resposta do sólido linear padrão no formato de Kelvin a um teste de relaxação com passos de cálculo $\Delta t = 10^{0.5 \times i} - 10^{0.5 \times (i-1)}$ dias: (a) Evolução da tensão nos componentes; (b) Evolução da deformação nos componentes.

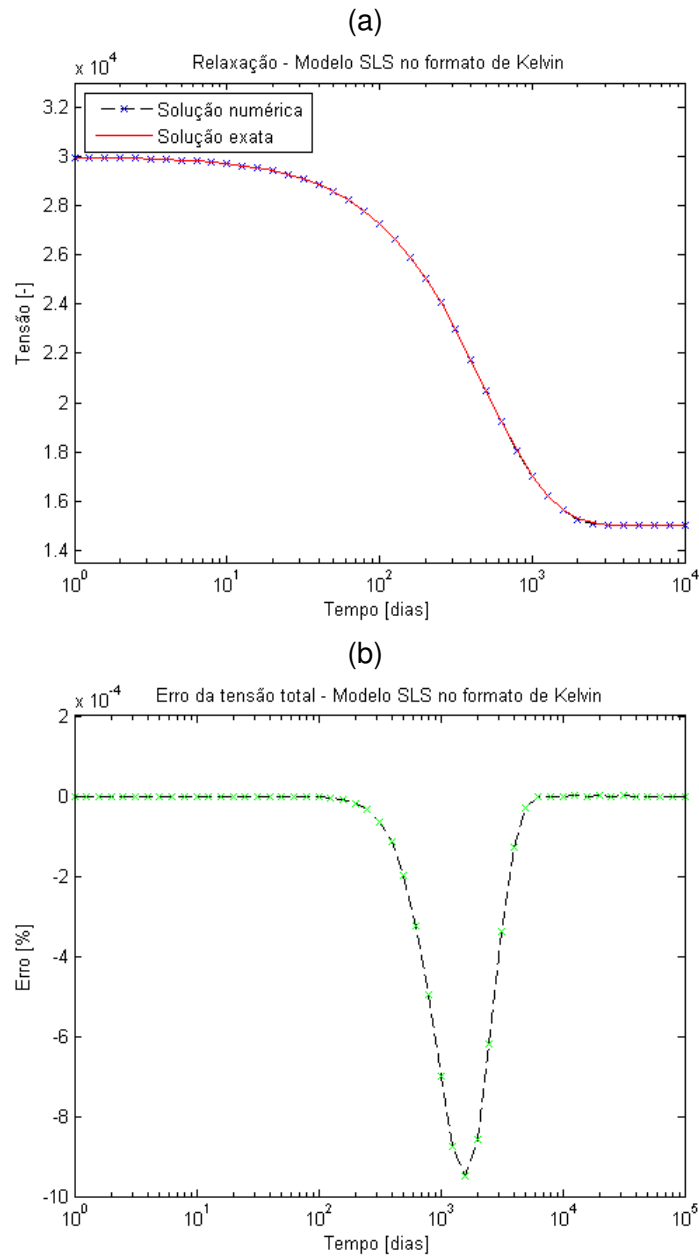
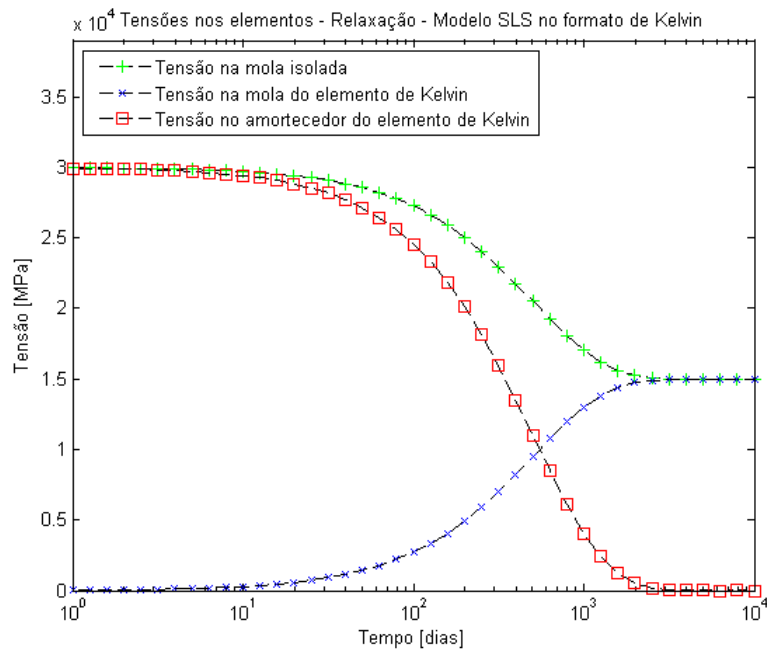


Figura 2.45: Resposta do sólido linear padrão no formato de Kelvin a um teste de relaxação com passos de cálculo $\Delta t = 10^{0.1 \times i} - 10^{0.1 \times (i-1)}$ dias: (a) Tensão total; (b) Erro da tensão total.

(a)



(b)

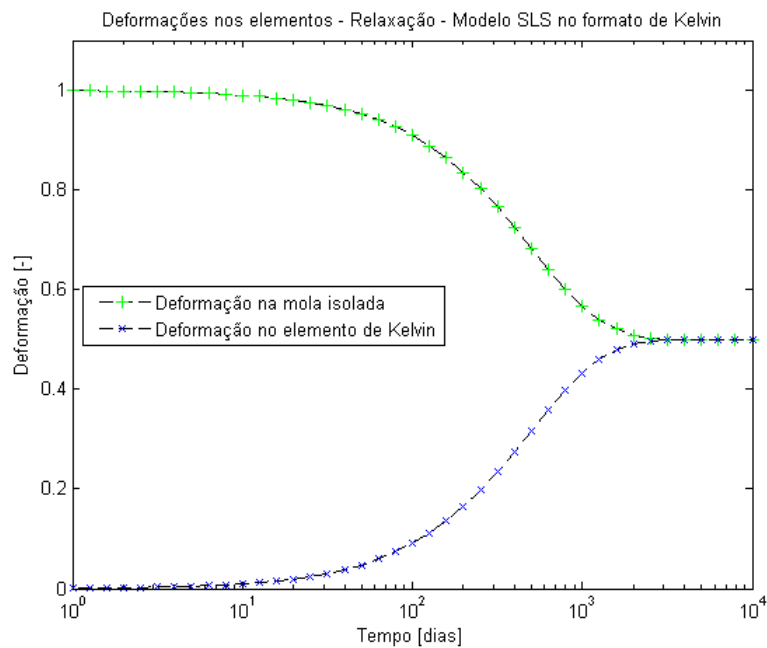


Figura 2.46: Resposta do sólido linear padrão no formato de Kelvin a um teste de relaxação com passos de cálculo $\Delta t = 10^{0.1 \times i} - 10^{0.1 \times (i-1)}$ dias: (a) Evolução da tensão nos componentes; (b) Evolução da deformação nos componentes.

2.6 Modelação da viscoelasticidade no betão

Nesta secção mostra-se de que forma se podem utilizar os modelos apresentados nas secções anteriores para modelar a viscoelasticidade num determinado material, em particular no betão. Por outras palavras, apresenta-se a metodologia a adotar para ajustar os parâmetros destes modelos às características do material pretendido. Após a introdução da metodologia, será apresentado um exemplo ilustrativo e efetuada a respetiva análise.

2.6.1 Modelação pelo modelo generalizado de Maxwell

Geralmente, os dados de entrada para cálculos de fluência são provenientes de ensaios de fluência ou de regulamentos que fornecem uma curva de fluência. Para se ser capaz de utilizar o modelo generalizado de Maxwell é necessário converter estes dados de fluência numa curva de relaxação e, posteriormente, ajustar a curva de relaxação a um número finito de termos da série de Dirichlet. Este processo é mais convenientemente apresentado se, para o caso de um teste de relaxação uni-dimensional, for imposta uma deformação de valor unitário $\varepsilon = 1$ no instante $\tau = t_0$. Recordando que H é a função de passo unitário Heaviside, pode-se escrever

$$\varepsilon(\tau) = H(t_0) \quad (2.131)$$

e

$$\dot{\varepsilon}(\tau) = \delta(t_0), \quad (2.132)$$

em que $\delta(t)$ é a função Dirac. Assim, a Eq. (2.91) transforma-se então em

$$\sigma(t) = E(t - t_0). \quad (2.133)$$

De acordo com a Eq. (2.95) a deformação é função do tempo, com $t > t_0$, ou seja,

$$\varepsilon(t) = J(t - t_0) \sigma(t_0) + \int_{t_0}^t J(t - \tau) \dot{\sigma}(\tau) d\tau. \quad (2.134)$$

Substituindo a Eq. (2.133) em (2.134) fica

$$\varepsilon(t) = J(t - t_0) E(t_0) + \int_{t_0}^t J(t - \tau) \dot{E}(\tau) d\tau. \quad (2.135)$$

A função de relaxação E pode ser calculada através da integração numérica da

Eq. (2.135). Esta integração pode ser efetuada, de um modo simples, com o método de Euler, embora existam outros métodos mais sofisticados como é o exemplo da regra dos trapézios. Com o método de Euler progressivo obtém-se

$$\varepsilon(t_j) = J(t_j - t_0) E(t_0) + \sum_{i=1}^j J(t_j - t_i) \Delta E^i. \quad (2.136)$$

A variação da deformação entre o instante inicial e o instante j é nula num teste de relaxação, pelo que se tem

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon_j - \varepsilon_0 = 0. \quad (2.137)$$

Das Eqs. (2.136) e (2.137) resulta a seguinte expressão geral para o cálculo das variações da função de relaxação para cada passo de cálculo:

$$J(t_j - t_0)E(t_0) + \sum_{i=1}^j J(t_j - t_i)\Delta E^i - 1 = 0. \quad (2.138)$$

Para calcular todos os valores da função de relaxação basta resolver a equação anterior em cada passo de cálculo e ter em conta que

$$E(t_j) = E(t_{j-1}) + \Delta E^j, \quad (2.139)$$

e

$$E(t_0) = \frac{1}{J(t_0)}. \quad (2.140)$$

Existe ainda outra abordagem que consiste na subtração das deformações de dois instantes generalizados j e $j - 1$. Para $j - 1$ tem-se

$$\varepsilon(t_{j-1}) = J(t_{j-1} - t_0) E(t_0) + \sum_{i=1}^{j-1} J(t_{j-1} - t_i) \Delta E^i. \quad (2.141)$$

O incremento de deformação $\Delta\varepsilon = \varepsilon(t_j) - \varepsilon(t_{j-1})$ é escrito como

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon &= [J(t_j - t_0) - J(t_{j-1} - t_0)] E(t_0) \\ &+ \sum_{i=1}^{j-1} [J(t_j - t_i) - J(t_{j-1} - t_i)] \Delta E^i + J(t_0) \Delta E^j, \end{aligned} \quad (2.142)$$

ou, alternativamente, mudando a ordem do somatório,

$$\Delta\varepsilon = \sum_{i=0}^{j-1} [J(t_j - t_i) - J(t_{j-1} - t_i)] \Delta E^i + J(t_0) \Delta E^j. \quad (2.143)$$

Uma vez que, em incrementos subsequentes, a variação da deformação permanece nula, o resultado é

$$\Delta E^j = -\frac{1}{J(t_0)} \sum_{i=0}^{j-1} [J(t_j - t_i) - J(t_{j-1} - t_i)] \Delta E^i, \quad (2.144)$$

com ΔE^i definido como

$$\Delta E^i = E(t_i) - E(t_{i-1}), \quad (2.145)$$

O valor da função de relaxação no instante $t = t_j$ pode ser em seguida calculado usando a Eq. (2.145). No entanto, esta abordagem torna-se um pouco mais complexa pois o algoritmo da Eq. (2.144) gera uma variável ΔE^0 que não é de cálculo trivial. Por este motivo adotou-se, daqui em diante, a primeira abordagem.

Conhecidos os valores da função de relaxação de uma forma discreta ($E(t_i - t_0)$), podem ser determinados os valores dos módulos de elasticidade (E_∞ e E_α) da função de relaxação ($E(t_i - t_0)$, Eq. (2.97)) do modelo generalizado de Maxwell utilizando o Método dos Mínimos Quadrados

$$\Phi = \sum_{i=1}^N \left(E(t_i - t_0) - \tilde{E}(t_i - t_0) \right)^2. \quad (2.146)$$

A decisão do número de pontos da função de relaxação \tilde{E} que serão adotados, e consequentemente quantos elementos da cadeia de Maxwell serão tidos em conta, é uma questão de ponderação entre a precisão pretendida e o esforço computacional envolvido. Um maior número de pontos de amostragem proporciona um melhor ajuste da curva de fluência, mas resulta resultará num maior esforço computacional. A experiência, no que diz respeito ao betão, diz que seis ou sete pontos de amostragem geralmente resultam numa aproximação razoavelmente precisa da curva de fluência [86]. A próxima questão que se coloca é que tempos de relaxação é que se vão escolher para os elementos da cadeia de Maxwell e o número de elementos adotados. Devido ao carácter exponencial, faz sentido usar tempos de relaxação que diferem num fator de 10 (por exemplo: 1, 10, 100, 1000, etc.) [86].

A substituição da expansão da série de Dirichlet, para o caso de materiais sem envelhecimento, dá

$$\Phi = \sum_{i=1}^N \left(E_\infty + \sum_{\alpha=1}^n E_\alpha \exp\left(-\frac{t_i - t_0}{\lambda_\alpha}\right) - \tilde{E}(t_i - t_0) \right)^2. \quad (2.147)$$

O valor dos módulos E_α pode então ser calculado exigindo que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial E_\alpha} = 0 \quad \alpha = \infty, 1, \dots, n. \quad (2.148)$$

Finalmente, observa-se que a extensão deste procedimento para materiais que exibem envelhecimento é mais complexo. O procedimento acima descrito permite que se calculem os valores discretos de parâmetros. Se se optar por não manter E_α constante, há que definir primeiro a dependência entre E_α e τ . Por outras palavras, é necessário definir a função $E_\alpha(\tau)$ antes do momento em que os coeficientes que ocorrem na expressão de E_α possam ser calculados.

2.6.2 Modelação pelo modelo generalizado de Kelvin

Tal como no caso anterior, os módulos de elasticidade do modelo generalizado de Kelvin podem ser obtidos ajustando a expansão de Dirichlet à curva de fluência fornecida pelos regulamentos através do Método dos Mínimos Quadrados:

$$\Phi = \sum_{i=1}^N \left(J(t_i - t_0) - \tilde{J}(t_i - t_0) \right)^2. \quad (2.149)$$

Para o caso de materiais sem envelhecimento, a Eq. (2.149) fica

$$\Phi = \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{E_0} + \sum_{\alpha=1}^n \frac{1}{E_\alpha} \left[1 - \exp\left(-\frac{t - \tau}{\lambda_{J\alpha}}\right) \right] - \tilde{J}(t_i - t_0) \right)^2. \quad (2.150)$$

O valor dos módulos E_α pode então ser calculado minimizando a expressão (2.150):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial E_\alpha} = 0 \quad \alpha = 0, 1, \dots, n. \quad (2.151)$$

2.6.3 Aplicação e análise dos algoritmos

Em seguida, será feita a aproximação da curva de relaxação do betão à expansão de Dirichlet do modelo generalizado de Maxwell e a aproximação da curva de fluência do betão à expansão de Dirichlet do modelo generalizado de Kelvin, para um determinado tipo de betão.

Modelação pelo modelo generalizado de Maxwell

Os dados de fluência utilizados são os recomendados pelo Eurocódigo (EC2) [32] e as equações que definem a curva de fluência são apresentadas no Apêndice B. A rotina apresentada na Fig. 2.47 foi criada para implementar a função de fluência do EC2. Os parâmetros adotados foram: módulo de elasticidade do betão $E_{betão} = 27 \text{ GPa}$, espessura do elemento equivalente $h_0 = 140 \text{ mm}$, humidade relativa $RH = 80\%$ e resistência média à compressão do betão $f_{cm} = 38 \text{ MPa}$. A curva obtida é ilustrada na Fig. 2.48.

```

function J=J(t,t0)
E0=27000; h=140; RH=80; fcm=38;
alfa3=(35/fcm)^0.5;
b=1.5*h*(1+(1.2*RH/100)^18);
if fcm<=35
    if b+250<= 1500
        betah=b+250;
    else
        betah=1500;
    end
else
    if b+250*alfa3<=1500*alfa3
        betah=b+250*alfa3;
    else
        betah=1500*alfa3;
    end
end
betac=((t-t0)/(betah+(t-t0)))^0.3;
alfa1=(35/fcm)^0.7;
alfa2=(35/fcm)^0.2;
betafcm=16.8/sqrt(fcm);
betat0=1/(0.1+t0^0.2);
if fcm<= 35
    fiRH=1+((1-RH/100)/(0.1*h^(1/3)));
else
    fiRH=(1+((1-RH/100)/(0.1*h^(1/3)))*alfa1)*alfa2;
end
fi0=fiRH*betafcm*betat0;
fi=fi0*betac;
J=(1/E0+fi/E0);
end

```

Figura 2.47: Rotina de implementação da função de fluência recomendada pelo EC2

Para a obtenção da função de relaxação a partir de dados de fluência criou-se uma rotina onde se implementaram as Eqs. (2.138), (2.139) e (2.140) e é ilustrada na Fig. 2.49. A implementação da algoritmo consiste no cálculo da variação da função de relaxação em cada passo de cálculo com a Eq. (2.138) que por sua vez é utilizada para calcular o valor da função de relaxação no mesmo passo de cálculo com a Eq. (2.139). A variação da função de relaxação do passo de cálculo atual é armazenada numa matriz para o cálculo das variações da função de relaxação nos passos de cálculo seguintes.

Tendo a curva de relaxação definida, pretende-se ajustar essa curva à expansão da série de Dirichlet da Eq. (2.97). Ao invés de se programar as Eqs. (2.147) e (2.148) diretamente numa rotina, optou-se por implementar uma função de ajuste de curvas não-lineares através de mínimos quadrados (`lsqcurvefit`) pré-definida no MATLAB, na rotina apresentada na Fig. 2.51.

Inicialmente, optou-se por expandir a série de Dirichlet em cinco termos, com

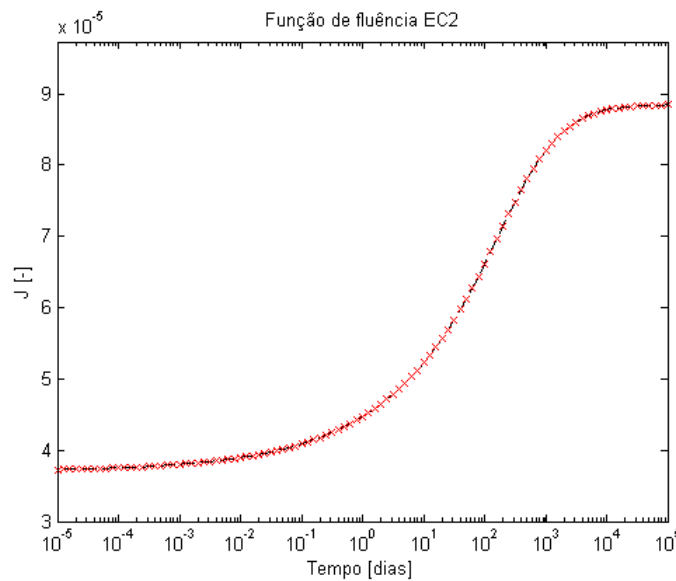


Figura 2.48: Curva de fluência recomendada pelo EC2 com $E = 27000 \text{ MPa}$, $h_0 = 150 \text{ mm}$, $RH = 80\%$ e $f_{cm} = 38 \text{ MPa}$

```
function E=detrel()

n=101;
deltaE=zeros(n-1,1);           %Inicialização das matrizes
E=zeros(n,1);
T=zeros(n,1);

for i=1:n                        %Matriz dos instantes do tempo
    T(i,1) = 10^(.1*(i-51));
end

E(1,1)=1/J((T(1,1)),0);        %condições iniciais

for j=1:n-1                      %ciclo de implementação do algoritmo
    deltaE(j,1)=E(1,1)*(1-J(T(j+1,1),0)*E(1,1));
    for i=1:j-1
        deltaE(j,1)=deltaE(j,1)-E(1,1)*deltaE(i,1)*J(T(j,1)-T(i,1),0);
    end
    E(j+1,1)=E(j,1)+deltaE(j,1);
end

end
```

Figura 2.49: Rotina de implementação do algoritmo de determinação da função de relaxação a partir de dados de fluência

tempos de relaxação de 1,10,100,1000 e 10000 dias, ajustando a expansão a dez pontos da curva de relaxação obtida a partir da função de fluência fornecida pelo EC2 (Fig. 2.50) (ver Tab. 2.1).

O valor dos parâmetros E obtidos são os apresentados na Tab. 2.2.

Uma vez definidos os parâmetros do modelo generalizado de Maxwell criou-se uma nova rotina, com base na rotina da Fig. 2.27, para o cálculo da relaxação que

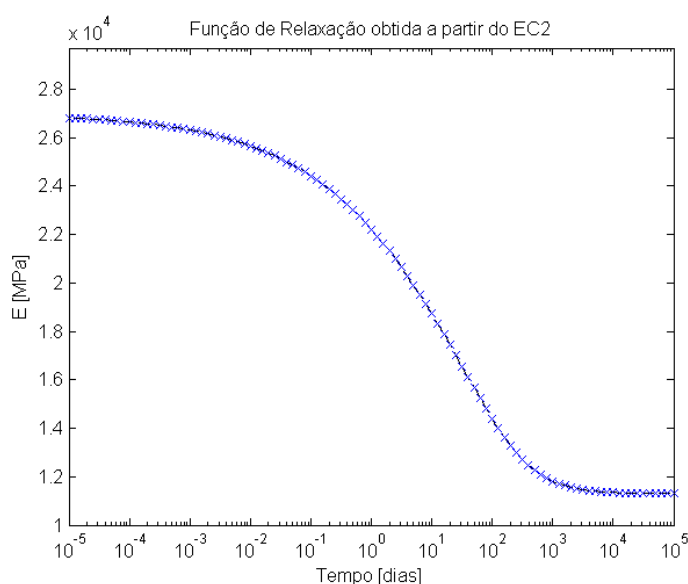


Figura 2.50: Função de relaxação obtida a partir da função de fluência regulamentar do EC2.

```
function pE=parametrosEMaxwell()

options=optimset('MaxIter',100000,'MaxFunEvals',300000);

EE=detrel;

P1=1/J(0,0); P2=EE(21,1); P3=EE(31,1); P4=EE(41,1); P5=EE(51,1);
P6=EE(61,1); P7=EE(71,1); P8=EE(81,1); P9=EE(91,1); P10=EE(101,1)

tdata=[10^-5 0.001 0.01 0.1 1 10 100 1000 10000 100000];
Edata=[P1 P2 P3 P4 P5 P6 P7 P8 P9 P10]

resto=pE(4)*exp(-tdata/100)+pE(5)*exp(-tdata/1000)+pE(6)*exp(-tdata/10000);
F=@(pE,tdata)pE(1)+pE(2)*exp(-tdata/1)+pE(3)*exp(-tdata/10)+resto;

pE0=[0 0 0 0 0 0];
lb=[0 0 0 0 0 0];
ub=[inf inf inf inf inf inf];

pE=lsqcurvefit(F,pE0,tdata,Edata,lb,ub,options);

end
```

Figura 2.51: Rotina de implementação dos mínimos quadrados para o ajuste da expansão de Dirichlet do modelo generalizado de Maxwell à curva de relaxação regulamentar.

é função do número de termos da série de Dirichlet adotados e é apresentada na Fig. 2.52.

Para verificar se o número de termos da série adotados é adequado, executou-se a rotina da Fig. 2.52 para uma deformação unitária imposta e comparou-se com a curva da função de relaxação obtida a partir da função de fluência fornecida pelo EC2 (Fig. 2.50), com o objetivo de avaliar o ajuste da expansão de Dirichlet. As

$\tilde{E}(0.00001)$	[GPa]	27.000
$\tilde{E}(0.001)$	[GPa]	26.311
$\tilde{E}(0.01)$	[GPa]	25.654
$\tilde{E}(0.1)$	[GPa]	24.418
$\tilde{E}(1)$	[GPa]	22.225
$\tilde{E}(10)$	[GPa]	18.734
$\tilde{E}(100)$	[GPa]	14.400
$\tilde{E}(1000)$	[GPa]	11.813
$\tilde{E}(10000)$	[GPa]	11.352
$\tilde{E}(100000)$	[GPa]	11.298

Tabela 2.1: Pontos da função de relaxação da Fig. 2.50, com os quais se ajustou a expansão da série de Dirichlet.

E_∞	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
$\lambda = 1 \text{ dia}$	$\lambda = 10 \text{ dias}$	$\lambda = 100 \text{ dias}$	$\lambda = 1000 \text{ dias}$	$\lambda = 10000 \text{ dias}$	
$\times 10^3 [\text{MPa}]$	$\times 10^3 [\text{MPa}]$	$\times 10^3 [\text{MPa}]$	$\times 10^3 [\text{MPa}]$	$\times 10^3 [\text{MPa}]$	$\times 10^3 [\text{MPa}]$
1.124	6.021	1.012	7.207	0.027	0.537

Tabela 2.2: Valores dos módulos de elasticidade da expansão de Dirichlet do modelo generalizado de Maxwell com cinco termos.

duas curvas são sobrepostas na Fig. 2.53a.

Analisando as curvas da Fig. 2.53a verifica-se que o ajuste da expansão de Dirichlet com cinco termos não é a melhor. Por isso, decidiu-se expandir a série de Dirichlet em sete termos, adicionando os termos correspondentes aos tempos de relaxação 0.01 e 0.1 dias. Assim, recorrendo mais uma vez ao método dos mínimos quadrados e ajustando aos pontos da Tab. 2.1 obtiveram-se os valores dos parâmetros da cadeia de Maxwell apresentados na Tab. 2.3.

E_∞	[MPa]	1.1297×10^3
$E_1, \lambda = 0.01 \text{ dia}$	[MPa]	1.699×10^3
$E_2, \lambda = 0.1 \text{ dia}$	[MPa]	0.487×10^3
$E_3, \lambda = 1 \text{ dia}$	[MPa]	3.108×10^3
$E_4, \lambda = 10 \text{ dias}$	[MPa]	3.480×10^3
$E_5, \lambda = 100 \text{ dias}$	[MPa]	5.521×10^3
$E_6, \lambda = 1000 \text{ dias}$	[MPa]	1.016×10^3
$E_7, \lambda = 10000 \text{ dias}$	[MPa]	0.156×10^3

Tabela 2.3: Valores dos módulos de elasticidade da expansão de Dirichlet do modelo generalizado de Maxwell com sete termos.

A expansão com sete termos, compostos com os parâmetros da Tab. 2.3, leva a um melhor ajuste à curva obtida a partir do EC2 como pode ser verificado analisando as curvas definidas na Fig. 2.53b. Analisando as Figs. 2.54a e 2.54b constata-se que o erro máximo cometido com a expansão com sete é cerca de duas vezes menor que o cometido com a expansão com cinco termos.

```

function ten=relaxationDirichlet(E,lambda,e0)

n=101;
vindep=zeros(n,1);vdepST=zeros(n,1); %inicialização das matrizes
vdepSs=zeros(n,1);Ss=zeros(size(E,2),1);
T=zeros(n,1);

for i=1:n %Matriz do tempo
    T(i,1) = 10^(.1*(i-51));
end

ST=e0*E(1,1); %Cálculo da tensão inicial
for i=2:size(E,2)
    ST=ST+(1-exp(-T(1,1)/lambda(1,i-1)))*E(1,i)*e0*lambda(1,i-1)/T(1,1); vdepST(1,1)=ST;
end

for i=1:size(E,2) %Tensão inicial nos elementos
    Ss(i,1)=E(1,i)*e0;
    vdepSs(1,i)=Ss(i,1);
end

for i=2:n %Ciclo de implementação do algoritmo incremental
    dS=0;
    for e=1:size(lambda,2) %Implementação do algoritmo incremental
        dS=dS-(1-exp(-(T(i,1)-T(i-1,1))/lambda(1,e)))*Ss(e+1,1);
    end

    ST=ST+dS; %Atualização das variáveis

    Ss(1,1)=E(1,1)*e0;
    for e=2:size(E,2)
        Ss(e,1)=Ss(e,1)*exp(-(T(i,1)-T(i-1,1))/lambda(1,e-1));
    end

    vindep(i,1)=T(i,1); %Armazenamento dos valores das variáveis
    vdepST(i,1)=ST; %independentes e dependentes em matrizes

    for e=1:size(E,2)
        vdepSs(i,e)=Ss(e,1);
    end
end

ten=vdepST; %Dados de saída
end

```

Figura 2.52: Rotina de implementação do algoritmo incremental do modelo generalizado de Maxwell para o caso da relaxação em função do número de termos da série de Dirichlet.

Observando as Figs. 2.55a e 2.55b é possível ter uma noção da evolução das tensões nos elementos da cadeia de Maxwell e a contribuição de cada termo da série de Dirichlet na função de relaxação em cada momento.

Visto que a função de relaxação obtida a partir da expansão da série de Dirichlet em sete termos é a que melhor se ajusta à função de relaxação obtida a partir da função de fluência recomendada pelo EC2, no último capítulo será esta a função utilizada nos cálculos.

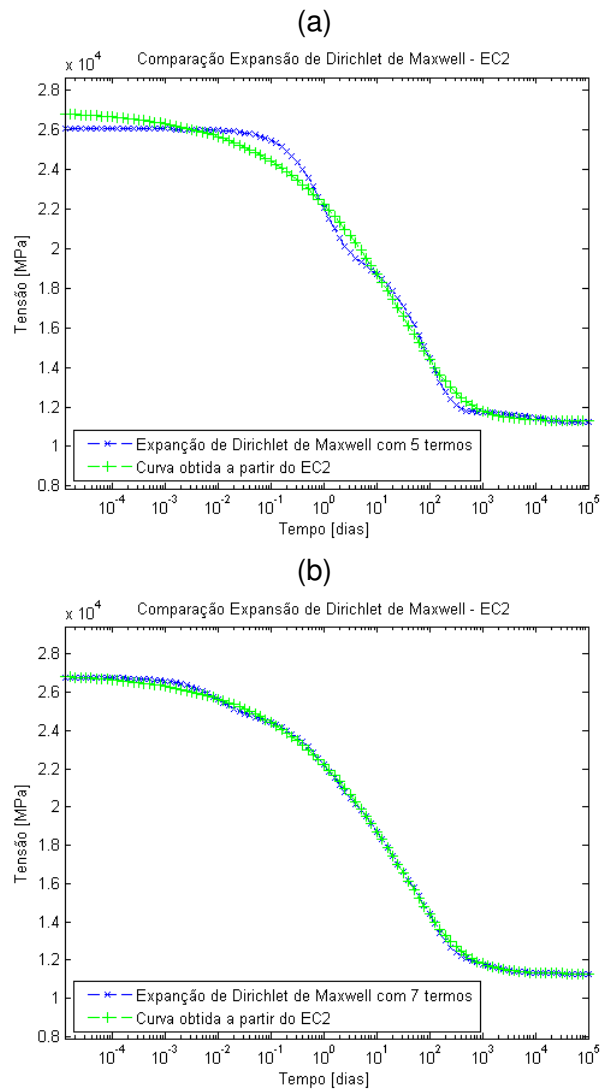


Figura 2.53: Comparação entre a curva obtida a partir do EC2 e a solução obtida através da cadeia de Maxwell com dois conjuntos de parâmetros: (a) Dados da Tab. 2.2; (b) Dados da Tab. 2.3.

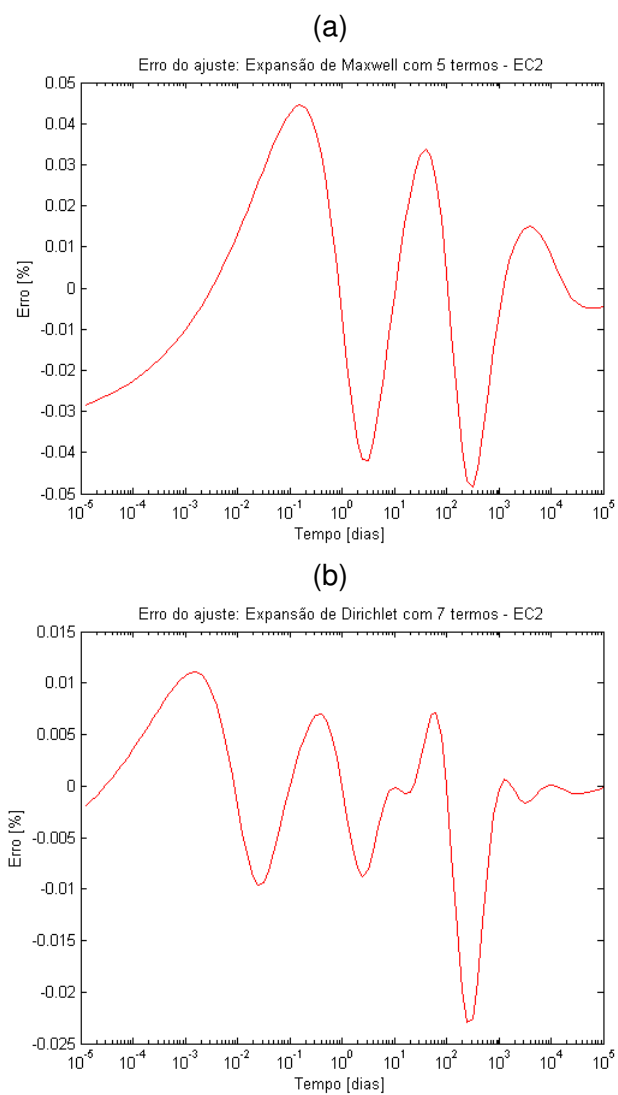


Figura 2.54: Erro cometido no ajuste da expansão de Dirichlet à curva regulamentar: (a) Expansão de Dirichlet com 5 termos; (b) Expansão de Dirichlet com 7 termos.

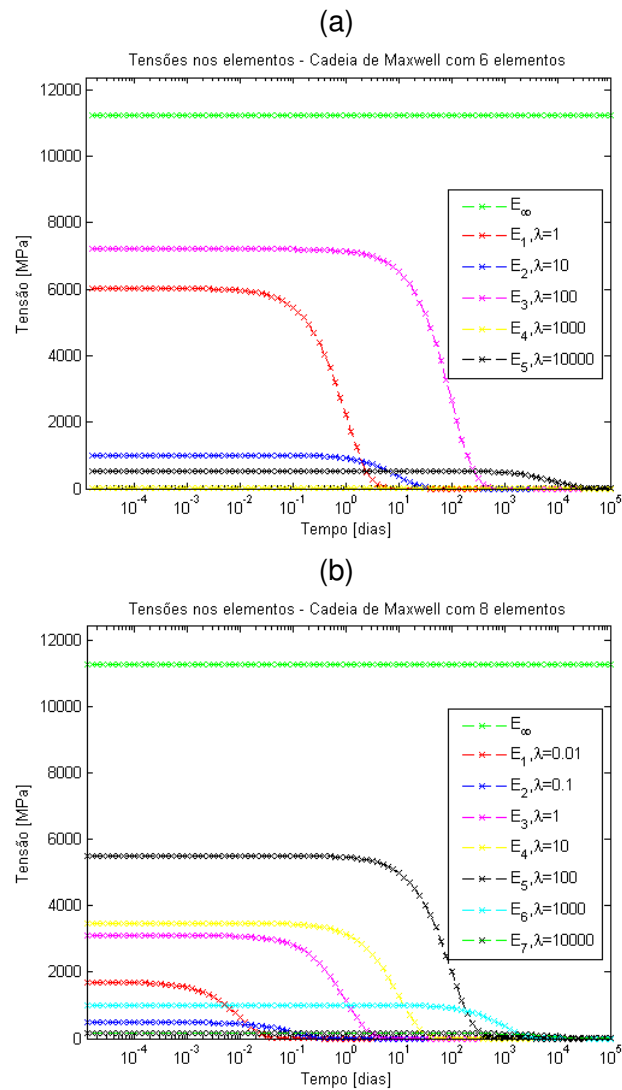


Figura 2.55: Evoluções da tensão nos elementos do modelo generalizado de Maxwell durante um ensaio de relaxação: (a) Série de Dirichlet com cinco termos; (b) Série de Dirichlet com sete termos.

Modelação pelo modelo generalizado de Kelvin

Tal como no caso anterior, a curva de fluência utilizada para ajustar a expansão de Dirichlet da Eq. (2.103) foi a curva recomendada pelo EC2 (Fig. 2.48), obtida com a adoção dos seguintes parâmetros: módulo de elasticidade do betão $E = 27000 \text{ MPa}$, espessura do elemento equivalente $h_0 = 150 \text{ mm}$, humidade relativa $RH = 80\%$ e resistência média à compressão do betão $f_{cm} = 38 \text{ MPa}$. A curva obtida é ilustrada na Fig. 2.48.

Mais uma vez, implementou-se numa rotina uma função de ajuste de curvas não-lineares através de mínimos quadrados (`lsqcurvefit`) pré-definida no MATLAB. Neste caso, para obter um melhor ajuste da expansão de Dirichlet à curva regulamentar, foi necessário limitar o valor do módulo de elasticidade da mola isolada do modelo generalizado de Kelvin (E_0) ao valor da função de fluência regulamentar no instante inicial e definir um critério de paragem dos mínimos quadrados mais refinado, na ordem de 10^{-16} . Ao não o fazer, verificou-se um mau ajuste da curva na primeira metade do intervalo do domínio, levando a erros de ordem de grandeza pouco razoáveis. A rotina criada para o efeito é apresentada na Fig. 2.56.

```
function pE=parametrosEKelvin()

options=optimset('MaxIter',100000,'MaxFunEvals',300000,'TolFun',10^-16);

P1=J(0,0); P2=J(0.001,0); P3=J(0.01,0); P4=J(0.1,0); P5=J(1,0);
P6=J(10,0); P7=J(100,0); P8=J(1000,0); P9=J(10000,0); P10=J(100000,0);

tdata=[0 0.001 0.01 0.1 1 10 100 1000 10000 100000];
Jdata=[P1 P2 P3 P4 P5 P6 P7 P8 P9 P10];

resto1=(1/pE(3))*(1-exp(-tdata/10))+(1/pE(4))*(1-exp(-tdata/100));
resto2=(1/pE(5))*(1-exp(-tdata/1000))+(1/pE(6))*(1-exp(-tdata/10000));
F=@(pE,tdata)1/pE(1)+(1/pE(2))*(1-exp(-tdata/1))+resto1+resto2;

pE0=[1000 1000 1000 1000 1000 1000];
lb=[0 0 0 0 0 0];
ub=[1/J(0,0) inf inf inf inf inf];

pE=lsqcurvefit(F,pE0,tdata,Jdata,lb,ub,options);

end
```

Figura 2.56: Rotina de implementação dos mínimos quadrados para o ajuste da expansão de Dirichlet do modelo generalizado de Kelvin à curva de fluência regulamentar.

Inicialmente, optou-se por expandir a série de Dirichlet em cinco termos, com tempos de relaxação de 1,10,100,1000 e 10000 dias, ajustando a dez pontos da curva de fluência regulamentar, apresentados na Tab. 2.4. O valor dos parâmetros E obtidos são os apresentados na Tab. 2.5.

Afim de se averiguar se o número adotado de termos é adequado, executou-se a rotina da Fig. 2.57 para uma tensão unitária imposta e efetuou-se a comparação com a curva regulamentar fornecida pelo EC2 (Fig. 2.48), para avaliar a qualidade

$\tilde{J}(0)$	[s]	0.3704×10^{-4}
$\tilde{J}(0.001)$	[s]	0.3800×10^{-4}
$\tilde{J}(0.01)$	[s]	0.3896×10^{-4}
$\tilde{J}(0.1)$	[s]	0.4088×10^{-4}
$\tilde{J}(1)$	[s]	0.4470×10^{-4}
$\tilde{J}(10)$	[s]	0.5225×10^{-4}
$\tilde{J}(100)$	[s]	0.6612×10^{-4}
$\tilde{J}(1000)$	[s]	0.8202×10^{-4}
$\tilde{J}(10000)$	[s]	0.8771×10^{-4}
$\tilde{J}(100000)$	[s]	0.8847×10^{-4}

Tabela 2.4: Pontos da função de fluência da Fig. 2.48 aos quais se ajustou a expansão da série de Dirichlet.

E_0	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
$\times 10^5 [MPa]$	$\lambda_j = 1 \text{ dia}$ $\times 10^5 [MPa]$	$\lambda_j = 10 \text{ dias}$ $\times 10^5 [MPa]$	$\lambda_j = 100 \text{ dias}$ $\times 10^5 [MPa]$	$\lambda_j = 1000 \text{ dias}$ $\times 10^5 [MPa]$	$\lambda_j = 10000 \text{ dias}$ $\times 10^5 [MPa]$
0.2596	1.3441	1.5693	0.4555	1.0062	1.9795

Tabela 2.5: Valores dos módulos de elasticidade da expansão de Dirichlet do modelo generalizado de Kelvin com cinco termos.

do ajuste das duas curvas. A sobreposição das duas curvas é ilustrada na Fig. 2.58a.

Analisando as curvas da Fig. 2.58a verifica-se que o ajuste com cinco termos não é o melhor. Por isso, decidiu-se expandir para seis termos, adicionando o termo correspondente ao tempo de retardação de 0.1 dias. Assim, recorrendo mais uma vez ao método dos mínimos quadrados e ajustando aos pontos da Tab. 2.4, obtiveram-se os valores dos parâmetros da cadeia de Kelvin apresentados na Tab. 2.6.

E_0	[MPa]	0.2645×10^5
$E_1, \lambda_j = 0.1 \text{ dia}$	[MPa]	2.5715×10^5
$E_2, \lambda_j = 1 \text{ dia}$	[MPa]	2.2797×10^5
$E_3, \lambda_j = 10 \text{ dias}$	[MPa]	1.8538×10^5
$E_4, \lambda_j = 100 \text{ dias}$	[MPa]	0.4460×10^5
$E_5, \lambda_j = 1000 \text{ dias}$	[MPa]	0.9193×10^5
$E_6, \lambda_j = 10000 \text{ dias}$	[MPa]	2.2806×10^5

Tabela 2.6: Valores dos módulos de elasticidade da expansão de Dirichlet do modelo generalizado de Kelvin com seis termos.

A expansão de Dirichlet com seis termos, compostos com os parâmetros da Tab. 2.6, leva a um melhor ajuste à curva regulamentar do EC2 como pode ser verificado analisando as curvas definidas na Fig 2.58b. Observando as Fig. 2.59a e 2.59b verifica-se que o erro máximo cometido no ajuste com uma expansão de seis termos é de cerca de metade do cometido com uma expansão de cinco

```

function def=creepDirichlet(E,lambda,sigma0)

es=zeros(size(lambda,2),1);vindep=zeros(101,1);           %inicialização das matrizes
vdepDT=zeros(101,1);

for i=1:101                                                  %construção da matriz do tempo
    T(i,1) = 10^(.1*(i-51));
end

DT=sigma0/E(1,1);                                           %cálculo da deformação inicial
for i=2:size(E,2)
    DT=DT+(sigma0/E(1,i))*(1-(lambda(1,i-1)/T(1,1))*(1-exp(-T(1,1)/lambda(1,i-1))));
end

for i=1:size(lambda,2)                                       %cálculo das variáveis de estado iniciais
    es(i,1)=sigma0/E(1,i+1);
end

for i=2:101                                                  %ciclo de implementação do algoritmo incremental
    dD=0;
    for e=1:size(lambda,2)                                   %cálculo do incremento de deformação
        dD=dD+es(e,1)*(1-exp(-(T(i,1)-T(i-1,1))/lambda(1,e))));
    end
    DT=DT+dD;                                                %cálculo da deformação total

    for e=1:size(lambda,2)                                   %Atualização do valor das variáveis de estado
        es(e,1)=es(e,1)*exp(-(T(i,1)-T(i-1,1))/lambda(1,e));
    end

    vindep(i,1)=T(i,1);                                       %Armazenamento das variáveis em matrizes
    vdepDT(i,1)=DT;
end

def=vdepDT;                                                  %Dados de saída

end

```

Figura 2.57: Rotina de implementação do algoritmo incremental do modelo generalizado de Kelvin para o caso da fluência em função do numero de termos da série de Dirichlet.

termos. Pode-se também constatar, comparando as Figs. 2.54b e 2.59b, que o erro de ajuste da expansão de Dirichlet de Kelvin com seis termos à curva regulamentar é muito próximo do obtido pela expansão de Dirichlet de Maxwell com sete termos.

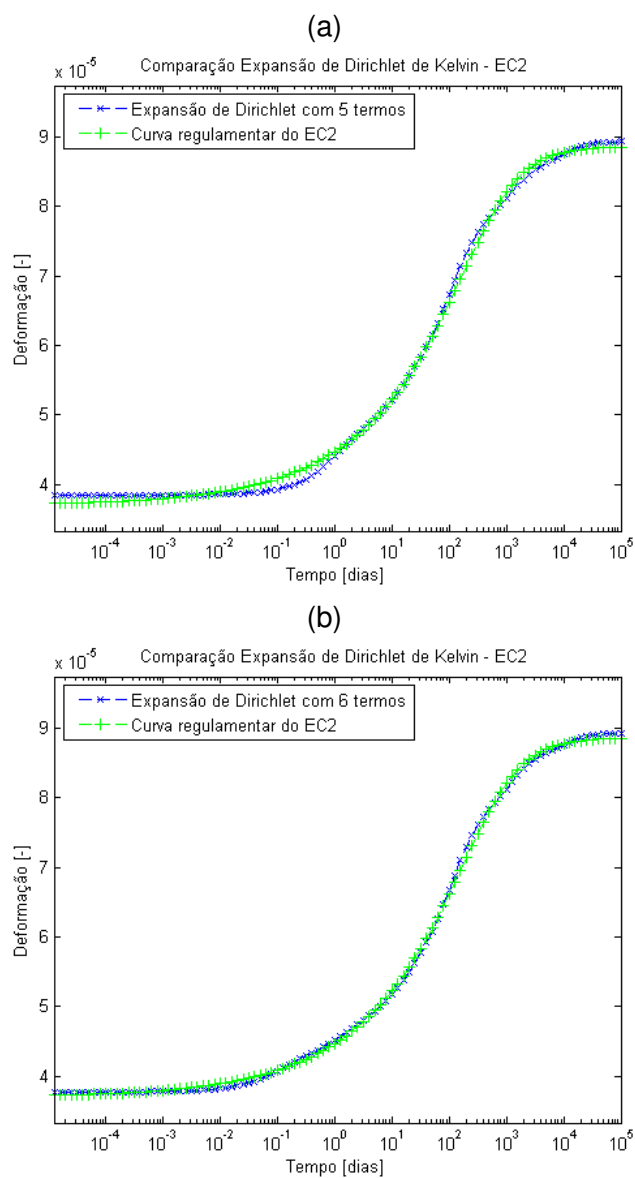


Figura 2.58: Comparação entre a curva regulamentar do EC2 e a solução obtida através do modelo generalizado de Kelvin com dois conjuntos de dados: (a) Parâmetros da Tab. 2.5; (b) Parâmetros da Tab. 2.6.

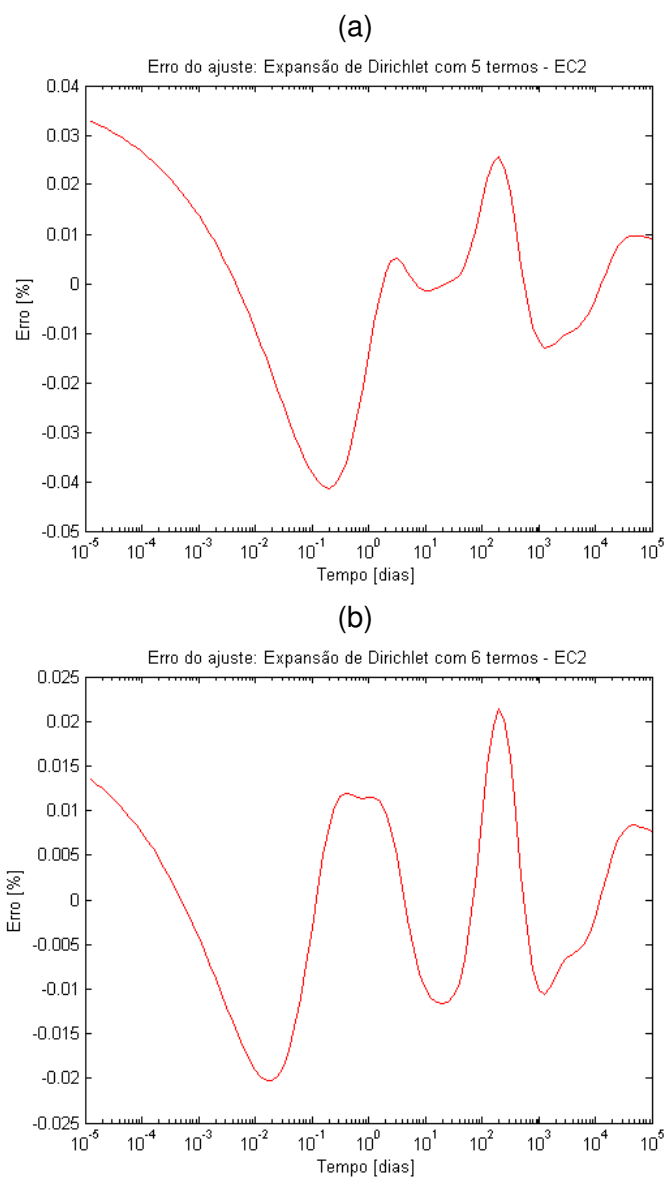


Figura 2.59: Erro cometido no ajuste da expansão de Dirichlet à curva regulamentar: (a) Expansão com 5 termos; (b) Expansão com 6 termos.

2.7 Implementação numérica

Nas secções anteriores foi abordada a modelação da viscoelasticidade de um determinado material, em particular o betão. A introdução de um novo material, nomeadamente o aço, torna o problema mais complexo. Considere-se que é aplicada uma carga pontual na extremidade de uma barra, como ilustra a Fig. 2.60.



Figura 2.60: Carga pontual aplicada na extremidade de uma barra.

No contexto de uma implementação de modelos viscoelásticos num elemento finito, torna-se necessário adequar as expressões e algoritmos anteriormente desenvolvidos ao cálculo de secções com diferentes materiais. Assim, de acordo com o Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV), tem-se

$$\delta W_{int} + \delta W_{ext} = 0, \quad (2.152)$$

para o caso uniaxial, a variação virtual do trabalho das forças internas é

$$\delta W_{int} = - \int_V \sigma \delta \varepsilon dV, \quad (2.153)$$

onde σ é a tensão, $\delta \varepsilon$ é a variação virtual da extensão conjugada e V é o volume do corpo. Para a acção de uma carga concentrada, a variação virtual do trabalho das forças externas é

$$\delta W_{ext} = Q \delta u. \quad (2.154)$$

onde δu é a variação do deslocamento conjugado de Q . Assim, a Eq. (2.152) fica

$$- \int_V \sigma \delta \varepsilon dV + Q \delta u = 0. \quad (2.155)$$

Admitindo a hipótese dos pequenos deslocamentos,

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (2.156)$$

onde x é o eixo em consideração. No caso do exemplo da Fig. 2.60, a tensão σ e a extensão ε não varia com x .

Transformando o integral no volume num integral na secção e escrevendo os termos da Eq. (2.155) em ordem à variação da deformação, obtém-se

$$-L \int_{\Omega} \sigma \delta \varepsilon d\Omega + LQ \delta \varepsilon = 0. \quad (2.157)$$

Introduzindo a variação no domínio do tempo $\Delta()$ na Eq. (2.152), tem-se

$$\Delta \delta W_{int} + \Delta \delta W_{ext} = 0, \quad (2.158)$$

o que resulta,

$$-L \int_{\Omega} \Delta \sigma \delta \varepsilon d\Omega + L \Delta Q \delta \varepsilon = 0. \quad (2.159)$$

2.7.1 Modelação pelo modelo generalizado de Maxwell

Substituindo $\Delta \sigma$ na Eq. (2.159) pela Eq. (2.114) e eliminando L e a variação da deformação $\delta \varepsilon$ em ambos os termos, obtém-se a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \left(E_{\infty}(t^*) \Delta \varepsilon + \sum_{\alpha=1}^n \left[1 - \exp \left(-\frac{\Delta t}{\lambda_{\alpha}} \right) \right] \left\{ \frac{E_{\alpha}(t^*)}{\frac{\Delta t}{\lambda_{\alpha}}} \Delta \varepsilon - \sigma_{\alpha}(t - \Delta t) \right\} \right) d\Omega \\ & + \Delta Q = 0. \end{aligned} \quad (2.160)$$

Considerando o caso em que o material não apresenta envelhecimento, ou seja, os módulos de elasticidade dos elementos da cadeia de Maxwell permanecem constantes ao longo do tempo, e isolando o termo em ordem à variação da deformação ao longo do tempo $\Delta \varepsilon$, obtém-se

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \left(E_{\infty} + \sum_{\alpha=1}^n \frac{E_{\alpha}(t^*)}{\frac{\Delta t}{\lambda_{\alpha}}} \left[1 - \exp \left(-\frac{\Delta t}{\lambda_{\alpha}} \right) \right] \right) \Delta \varepsilon d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^n \left[1 - \exp \left(-\frac{\Delta t}{\lambda_{\alpha}} \right) \right] \sigma_{\alpha}(t - \Delta t) d\Omega + L \Delta Q = 0. \end{aligned} \quad (2.161)$$

Uma vez que se têm dois materiais, aço e betão, desprezando o comportamento viscoelástico do aço a resolução dos integrais resulta em

$$\begin{aligned}
& -\Omega_{betao}\Delta\varepsilon\left(E_{\infty}+\sum_{\alpha=1}^n\frac{E_{\alpha}(t^*)}{\frac{\Delta t}{\lambda_{\alpha}}}\left[1-\exp\left(-\frac{\Delta t}{\lambda_{\alpha}}\right)\right]\right)-\Omega_{aco}\Delta\varepsilon E_{aco} \\
& +\Omega_{betao}\sum_{\alpha=1}^n\left[1-\exp\left(-\frac{\Delta t}{\lambda_{\alpha}}\right)\right]\sigma_{\alpha}(t-\Delta t)+\Delta Q=0.
\end{aligned} \tag{2.162}$$

Para o cálculo de um problema de fluência é necessário exprimir a Eq. (2.162) em ordem à variação da deformação $\Delta\varepsilon$. Assim, a expressão para o cálculo incremental da deformação é dada por

$$\Delta\varepsilon = \frac{\Delta Q + \Omega_{betao}\sum_{\alpha=1}^n\left[1-\exp\left(-\frac{\Delta t}{\lambda_{\alpha}}\right)\right]\sigma_{\alpha}(t-\Delta t)}{\Omega_{betao}\left[E_{\infty}+\sum_{\alpha=1}^n\frac{E_{\alpha}(t^*)}{\frac{\Delta t}{\lambda_{\alpha}}}\left[1-\exp\left(-\frac{\Delta t}{\lambda_{\alpha}}\right)\right]\right]+\Omega_{aco}E_{aco}}. \tag{2.163}$$

No caso de um problema de relaxação, exprime-se a Eq. (2.162) em ordem à variação da força aplicada ΔQ . Assim a expressão para o cálculo incremental do esforço axial é dada por

$$\begin{aligned}
\Delta Q = \Delta\varepsilon & \left[\Omega_{betao}\left(E_{\infty}+\sum_{\alpha=1}^n\frac{E_{\alpha}(t^*)}{\frac{\Delta t}{\lambda_{\alpha}}}\left[1-\exp\left(-\frac{\Delta t}{\lambda_{\alpha}}\right)\right]\right)+\Omega_{aco}\Delta E_{aco}\right] \\
& -\Omega_{betao}\sum_{\alpha=1}^n\left[1-\exp\left(-\frac{\Delta t}{\lambda_{\alpha}}\right)\right]\sigma_{\alpha}(t-\Delta t).
\end{aligned} \tag{2.164}$$

2.7.2 Modelação pelo modelo generalizado de Kelvin

Dispondo a expressão da Eq. (2.124) em ordem a $\Delta\sigma$, substituindo a expressão resultante por $\Delta\sigma$ na Eq. (2.159) e eliminando a variação da deformação $\delta\varepsilon$ em ambos os termos, obtém-se

$$-L\int_{\Omega}\left[\frac{\Delta\varepsilon-\sum_{\alpha=1}^N\varepsilon_{\alpha}^*(t-\Delta t)\left(1-\exp\left(-\frac{\Delta t}{\lambda_{J\alpha}}\right)\right)}{\frac{1}{E_0(t^*)}+\sum_{\alpha=1}^N\frac{1}{E_{\alpha}(t^*)}\left[1-\frac{\lambda_{J\alpha}}{\Delta t}\left(1-\exp\left(-\frac{\Delta t}{\lambda_{J\alpha}}\right)\right)\right]}\right]d\Omega+L\Delta Q=0. \tag{2.165}$$

Para o caso de materiais sem envelhecimento e isolando o termo em ordem à variação da deformação no tempo, tem-se

$$\begin{aligned}
& -L \int_{\Omega} \left[\frac{1}{\frac{1}{E_0(t^*)} + \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{E_{\alpha}(t^*)} \left[1 - \frac{\lambda_{J\alpha}}{\Delta t} \left(1 - \exp \left(-\frac{\Delta t}{\lambda_{J\alpha}} \right) \right) \right]} \right] \Delta \varepsilon d\Omega \\
& + L \int_{\Omega} \left[\frac{\sum_{\alpha=1}^N \varepsilon_{\alpha}^* (t - \Delta t) \left(1 - \exp \left(-\frac{\Delta t}{\lambda_{J\alpha}} \right) \right)}{\frac{1}{E_0(t^*)} + \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{E_{\alpha}(t^*)} \left[1 - \frac{\lambda_{J\alpha}}{\Delta t} \left(1 - \exp \left(-\frac{\Delta t}{\lambda_{J\alpha}} \right) \right) \right]} \right] d\Omega + L \Delta Q = 0.
\end{aligned} \tag{2.166}$$

Resolvendo os integrais na área dos dois materiais, desprezando o comportamento viscoelástico do aço, obtém-se

$$\begin{aligned}
& -\Omega_{betao} \Delta \varepsilon \left[\frac{1}{\frac{1}{E_0(t^*)} + \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{E_{\alpha}(t^*)} \left[1 - \frac{\lambda_{J\alpha}}{\Delta t} \left(1 - \exp \left(-\frac{\Delta t}{\lambda_{J\alpha}} \right) \right) \right]} \right] - \Omega_{aco} E_{aco} \Delta \varepsilon \\
& + \Omega_{betao} \left[\frac{\sum_{\alpha=1}^N \varepsilon_{\alpha}^* (t - \Delta t) \left(1 - \exp \left(-\frac{\Delta t}{\lambda_{J\alpha}} \right) \right)}{\frac{1}{E_0(t^*)} + \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{E_{\alpha}(t^*)} \left[1 - \frac{\lambda_{J\alpha}}{\Delta t} \left(1 - \exp \left(-\frac{\Delta t}{\lambda_{J\alpha}} \right) \right) \right]} \right] + \Delta Q = 0.
\end{aligned} \tag{2.167}$$

Expressando a Eq. (2.167) em ordem à variação da deformação fica-se com o algoritmo para o cálculo incremental da deformação de um problema de fluência, ou seja,

$$\Delta \varepsilon = \frac{\Delta Q + \Omega_{betao} \left[\frac{\sum_{\alpha=1}^N \varepsilon_{\alpha}^* (t - \Delta t) \left(1 - \exp \left(-\frac{\Delta t}{\lambda_{J\alpha}} \right) \right)}{\frac{1}{E_0(t^*)} + \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{E_{\alpha}(t^*)} \left[1 - \frac{\lambda_{J\alpha}}{\Delta t} \left(1 - \exp \left(-\frac{\Delta t}{\lambda_{J\alpha}} \right) \right) \right]} \right]}{\Omega_{betao} \left[\frac{1}{\frac{1}{E_0(t^*)} + \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{E_{\alpha}(t^*)} \left[1 - \frac{\lambda_{J\alpha}}{\Delta t} \left(1 - \exp \left(-\frac{\Delta t}{\lambda_{J\alpha}} \right) \right) \right]} \right] + \Omega_{aco} E_{aco}}. \tag{2.168}$$

Para o caso de um problema de relaxação, o algoritmo incremental para o cálculo do esforço axial é dado por

$$\begin{aligned}
\Delta Q = \Omega_{betao} \Delta \varepsilon & \left[\frac{1}{\frac{1}{E_0(t^*)} + \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{E_{\alpha}(t^*)} \left[1 - \frac{\lambda_{J\alpha}}{\Delta t} \left(1 - \exp \left(-\frac{\Delta t}{\lambda_{J\alpha}} \right) \right) \right]} \right] + \Omega_{aco} E_{aco} \Delta \varepsilon \\
& - \Omega_{betao} \left[\frac{\sum_{\alpha=1}^N \varepsilon_{\alpha}^* (t - \Delta t) \left(1 - \exp \left(-\frac{\Delta t}{\lambda_{J\alpha}} \right) \right)}{\frac{1}{E_0(t^*)} + \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{E_{\alpha}(t^*)} \left[1 - \frac{\lambda_{J\alpha}}{\Delta t} \left(1 - \exp \left(-\frac{\Delta t}{\lambda_{J\alpha}} \right) \right) \right]} \right]. \quad (2.169)
\end{aligned}$$

As expressões nesta secção serão utilizadas no Cap. 4, para o cálculo da fluência e da relaxação em exemplos de aplicação numa coluna mista.

Capítulo 3

Estado da arte da modelação dos efeitos diferidos do betão em colunas/vigas mistas aço-betão

3.1 Introdução

Neste capítulo será feita uma apresentação do estado da arte na modelação dos efeitos diferidos do betão e da modelação dos mesmos em colunas e vigas mistas aço-betão. Pretende-se apresentar os diversos tipos de modelações existentes dos efeitos diferidos do betão para estruturas mistas, bem como os métodos numéricos utilizados para ter em conta os vários parâmetros que afetam a resposta da estrutura mista e as várias não-linearidades. A exposição será segmentada em colunas mistas e vigas mistas.

3.2 Colunas mistas

As colunas mistas de aço-betão são normalmente classificadas em secções totalmente betonadas (Fig. 3.1a), secções parcialmente betonadas (Fig. 3.1b), secções tubulares betonadas (Fig. 3.1c) e secções tubulares betonadas com fronteira dupla (Fig. 3.1d)[78]. As secções parcialmente betonadas foram as primeiras utilizadas na construção, em que o betão foi incluído para satisfazer os requisitos de resistência ao fogo para o perfil de aço [78]. Com este arranjo, o betão envolvente também fornece proteção contra a corrosão. Um menor grau de proteção é obtido em colunas parcialmente betonadas, em que o betão apenas cobre algumas faces do perfil de aço. Uma das vantagens desta solução recai no uso de menor quantidade de cofragem quando comparada com as colunas totalmente betonadas. No caso dos tubos betonados, habitualmente designados por CFTs (*concrete filled tubes*), o betão é vertido dentro da secção de aço, que atua portanto como cofragem permanente. O aço exposto nos CFTs é mais suscetível ao fogo e à corrosão, quando comparado com o que se verifica

com colunas com secção totalmente revestida. Apesar disso, esta solução torna a construção mais célere, pois permite a ereção dos perfis de aço antes da betonagem. Esta metodologia permite que diversas equipas de trabalhadores possam trabalhar em simultâneo, em vários pisos do edifício. Por exemplo, enquanto no nível superior se erguem as colunas de aço e as vigas de aço que irão suportar a laje, no nível imediatamente inferior colocam-se as chapas perfiladas e os conectores de corte, no nível seguinte betona-se a laje e nos níveis inferiores a este, já betonados, efetuam-se os acabamentos e instalação de equipamento. Para completar esta solução com as exigências de resistência ao fogo é possível colocar armadura de reforço convencional, uma secção de aço adicional ou um segundo tubo menor dentro do betão (Fig. 3.1c). Um desenvolvimento recente dos CFTs consiste em tubos betonados de dupla fronteira, em que o betão é vertido entre dois perfis de aço tubulares, deixando o tubo interno vazado (Fig. 3.1d).

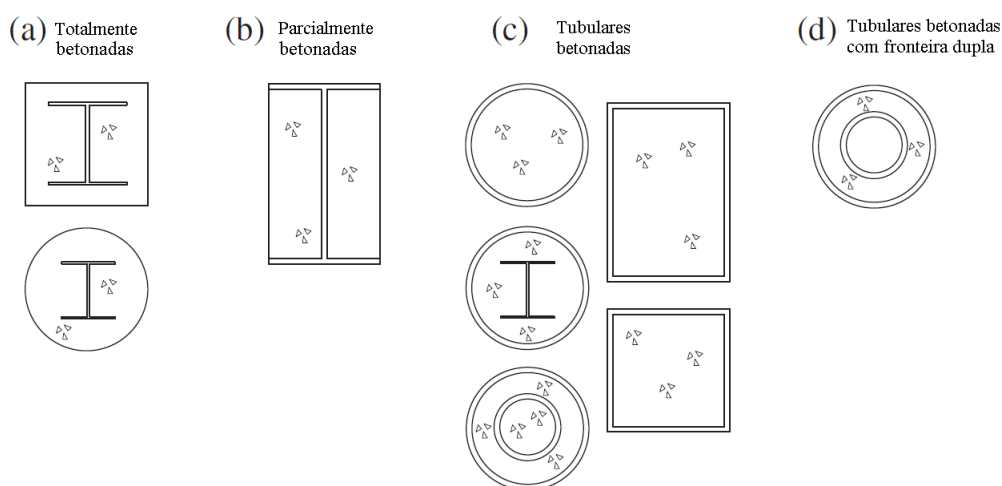


Figura 3.1: Secções típicas de colunas mistas aço-betão [78]

Outra vantagem da presença do betão consiste na sua capacidade de reduzir ou eliminar a possível ocorrência de encurvadura local da secção de aço, melhorando assim a classe da secção transversal. No caso das colunas totalmente betonadas, a encurvadura local é completamente eliminada, assumindo que a espessura do betão é suficiente para que não ocorra fragmentação. No caso de colunas parcialmente betonadas e colunas tubulares betonadas, os modos de instabilidade locais não são totalmente evitados mas ainda assim a resistência à encurvadura aumenta quando se compara com soluções de perfis de aço apenas, pois estes modos de instabilidade estão associados a diferentes configurações. A Fig. 3.2 ilustra este caso para uma secção tubular quadrada com e sem betão, onde se pode observar que o betão limita significativamente a deformação do perfil.

O facto de o betão poder exibir um valor do coeficiente de Poisson maior que o aço para elevados níveis de carregamento leva ao desenvolvimento de um efeito de confinamento, em que o aço providencia uma ação de restrição à expansão transversal do betão (Fig. 3.3). Constatou-se que tal efeito conduz a uma maior resistência em colunas curtas e a um comportamento de ductilidade

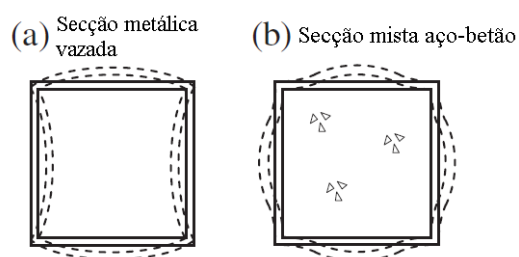


Figura 3.2: Exemplos dos modos de encurvadura para secções de aço e mistas aço-betão [78]

pronunciado no sistema misto, conferindo algumas vantagens que contribuem para a popularidade deste tipo de colunas em áreas sísmicas [78].

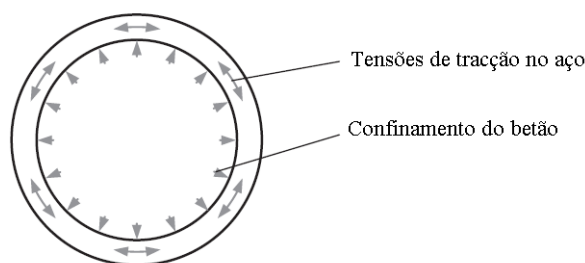


Figura 3.3: Exemplo do confinamento do betão num CFT circular [78]

A maior parte da investigação efetuada até à data foi focada no comportamento de longo prazo dos CFTs, enquanto os estudos relacionados com colunas totalmente e parcialmente betonadas são menos abundantes. Por isso, este estado da arte foca-se nos CFT, a menos que seja indicado o contrário.

3.2.1 Comportamento de longo termo do betão

O betão inserido no interior de perfis tubulares de aço não tem capacidade para libertar a humidade para o exterior. Por essa razão, os primeiros estudos em relação ao comportamento de longo prazo de colunas mistas focaram-se na identificação de como a fluência e a retração são afetadas por estas condições seladas.

Os trabalhos experimentais iniciais reportam-se aos anos 90 e mostram que os coeficientes de fluência a serem usados em colunas mistas são cerca de 50-60% dos valores correspondentes recomendados para elementos de betão convencionais [70, 90], valores esses que foram confirmados por pesquisas posteriores [52, 92, 58, 57]. Com a corrente tendência de usar classes de resistência do betão mais elevados, verificou-se que nestes casos os efeitos da fluência são mais reduzidos. Tal deve-se ao facto de a componente básica da fluência (φ_{basic} , não depende da secagem) tender a decrescer à medida que a resistência do betão aumenta. Esta tendência é ilustrada qualitativamente na

Fig. 3.4, em que os coeficientes de fluência, normalizados, são traçados para valores característicos da tensão de rotura do betão à compressão (f'_c), entre 20 MPa e 100 MPa. Os valores menores dos coeficientes de fluência para graus de resistência superiores reduzem a distribuição de tensões dependentes do tempo que normalmente ocorrem entre o aço e o betão.

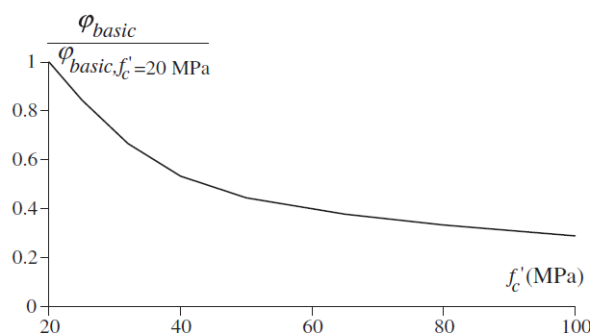


Figura 3.4: Variação da fluência básica para diferentes classes de resistência do betão [78]

Pesquisas recentes visaram avaliar modelos de fluência adequados à verificação das condições de serviço de colunas mistas, com aplicações em edifícios e pontes, incluindo arcos de pontes [85]. O modelo B3 [11] é recomendado para a determinação dos coeficientes de fluência em pesquisa [97] baseada em comparações extensivas entre resultados numéricos e experimentais, enquanto em [95, 41] sugere-se a utilização do EC2 [32] para betão tanto normal como expansivo. Da consideração de que os modelos lineares de previsão da fluência seriam capazes de descrever bem a resposta a longo prazo de colunas mistas sujeitas a níveis elevados de carregamento constante, Geng et al. [41] levanta a possibilidade de alargar a validade destes modelos lineares a níveis mais elevados de tensões, i.e. a 50% da resistência à compressão do betão [46].

No caso da retração, o impedimento da saída da humidade providenciado pela presença do perfil de aço previne a ocorrência da componente da retração devida à secagem (ε_{shd}), enquanto a componente autogénea (ε_{she}) não é afetada. Medições de longo prazo realizadas até à data em provetes não carregados, i.e. apenas sujeitos à retração, registaram pequenos valores de deformações. Com base nesta observação, foi sugerido que a retração fosse desprezada [70, 90, 52, 92]. A utilização de betão de classes de resistência superiores requer maior atenção como é destacado na Fig. 3.5, que esboça a variação da retração autogénea para diferentes classes de resistência. Destes gráficos é notório que a parte autogénea pode atingir 0.6 da retração total (ε_{sh}) para classes de resistência próximas de 100 MPa (Fig. 3.5a) e que a sua magnitude aumenta em relação à componente devida à secagem à medida que a classe de resistência aumenta (Fig. 3.5b). Apesar disso, a retração total para classes de resistência elevadas são menores que classes de resistência inferiores; por exemplo, a retração total para um betão de 100 MPa de resistência pode ser cerca de 35% menor que o valor exibido por uma mistura de 25 MPa. Neste contexto, é recomendável maior

investigação para quantificar adequadamente a influência da retração em colunas mistas betonadas com betão de classe de resistência elevada [78].

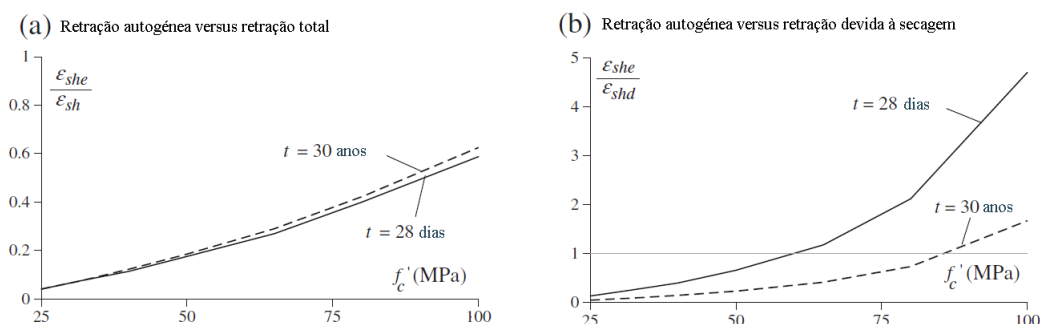


Figura 3.5: Variação da retração autogénea para diferentes classes de resistência do betão [78]

3.2.2 Análise e modelação dependente do tempo

O comportamento dependente do tempo do betão resulta numa redistribuição de tensões ao longo do tempo entre os componentes de aço e betão da coluna mista. Para uma adequada quantificação dos estados de tensão e deformação a usar em projeto é necessária uma previsão precisa do comportamento dependente do tempo, por exemplo, para determinar o encurtamento de colunas em edifícios altos ou avaliar a possível ocorrência de plastificação e/ou encurvadura em elementos estruturais provocada por deformações excessivas. A teoria da interação de corte completa, que pressupõe uma ligação perfeita entre os componentes de betão e aço na direção longitudinal da coluna, é normalmente adotada na descrição do comportamento dependente do tempo [21, 42, 43, 15]. Apesar de constituir uma aproximação, tem-se comprovado que a utilização desta teoria tem fornecido boas previsões de longo prazo [70, 68, 52, 95, 41, 21, 50, 49, 69].

Ichinoise et al. [52] realizaram uma série de ensaios afim de clarificar o comportamento dependente do tempo de elementos tubulares de aço betonados, através de um modelo viscoelástico simples. Utilizando o elemento de Kelvin como modelo, comparam os valores dos coeficientes de fluência obtidos com os valores recomendados pelas especificações Japonesas para pontes de autoestradas.

Wang et al. [95] executaram uma série de ensaios experimentais com secções tubulares betonadas com betão expansivo, com a finalidade de fornecer dados para a aferição de modelos numéricos. Testaram colunas curtas sujeitas a diferentes níveis de carregamento axial, aplicados a idades diferentes do betão. Baseando-se nos dados obtidos, investigaram a precisão de quatro modelos, EC2 [32], MC90 [89], AFREM [61] e B3 [11], na previsão da resposta de longo prazo de elementos ECFST (*expansive concrete filled steel tubes*).

Geng et al. [41] recomendam um modelo de previsão do comportamento de longo prazo do betão adequado a secções tubulares de aço betonadas (CFST)

usando resultados de 81 testes para fins de aferição numérica. Realizaram um estudo paramétrico extensivo para avaliar a influência dos efeitos diferidos para secções transversais normalmente usadas em aplicações em pontes. Finalmente, aplicaram métodos algébricos, adequados para cálculos de projeto, na previsão do comportamento de elementos CFST e investigaram a sua precisão por comparação com métodos incrementais.

Bridge RQ [21] investigou a influência da fluência e da retração no comportamento de colunas mistas sujeitas a carregamento constante. Testou colunas sujeitas a carregamentos com uma duração superior a 4 anos. Os dados obtidos foram comparados com previsões de uma análise incremental inelástica baseada no método da taxa de fluência (*rate of creep method*).

Han e Yang [50] estudaram o comportamento dependente do tempo de colunas de secção tubular retangular de parede fina (RHS) betonadas, através do modelo proposto pelas especificações ACI (ACI Committee 209,1992) [1]. Apresentaram um modelo teórico de análise para ter em conta os efeitos da fluência e retração em colunas betonadas RHS sujeitas a carregamento constante, sendo este um desenvolvimento da análise usada anteriormente para carregamentos de curto prazo (Han et al. 2001a) [51].

Naguib e Mirimiran [69] desenvolveram um algoritmo para calcular o comportamento dependente do tempo de colunas de secção tubular de aço betonadas, com interação completa e sem interação, usando dois métodos para a modelação da fluência básica do betão, *rate of flow method* e *double power law*. O modelo considera os efeitos do betão selado, estado multi-axial de tensões, coeficiente de Poisson na fluência, redistribuição de esforços e historial de tensões variável devido à fluência. O modelo é verificado com ensaios de fluência prévios em colunas com interação de corte total e sem interação.

Foram realizados estudos paramétricos extensivos usando estes modelos para considerar a influência de diferentes materiais e geometrias, e.g. [57, 58, 62, 93, 96, 83].

Kwon et al. [58] apresentaram um conjunto de estudos analíticos sobre o comportamento de longo prazo de colunas com perfil de aço circular betonado (CFTs) sujeitas a carregamento axial, considerando carregamento apenas no betão e carregamento conjunto no betão e no perfil de aço. O comportamento da ligação entre o betão e o perfil de aço, bem como o confinamento, foram considerados na formulação. Os resultados obtidos foram comparados com resultados experimentais.

Kwon et al. [57] desenvolveram estudos analíticos e experimentais sobre o comportamento de colunas de secção retangular de aço betonada, sujeitas a carregamento axial considerando quatro tipos de carregamento: (a) carregamento aplicado simultaneamente no betão e no perfil de aço; (b) carregamento aplicado apenas no betão; (c) carregamento aplicado na secção de aço e em três quartos da secção de betão; (d) carregamento aplicado na secção de aço e em metade da secção de betão. Com os dois últimos carregamentos pretende-se simular efeito de um diafragma instalado na secção tubular de aço. Foram testadas colunas de

600 mm de comprimento para os dois primeiros casos de carregamento, e foram testados espécimes de três comprimentos diferentes (600, 900 e 1200 mm) para os últimos dois tipos de carregamento, afim de investigar o efeito do tamanho do diafragma e do comprimento no comportamento de longo prazo.

Uy e Das [93] abordaram o efeito da fluência e da retração do betão em colunas CFT tipicamente usadas em edifícios altos. Os efeitos da fluência e da retração foram considerados usando método do módulo efetivo com a idade ajustada. A análise considerou carregamento incremental para simular a construção dos vários pisos de um edifício. Foi desenvolvido um estudo paramétrico para considerar os efeitos de diferentes materiais e propriedades geométricas, bem como o número de pisos construídos num edifício. Foi desenvolvido um estudo da distribuição de deformações e tensões e foi desenvolvido um modelo numérico para a determinação do encurtamento axial.

3.3 Vigas mistas

As vigas mistas são bastante populares, sendo utilizadas tanto em pontes como em edifícios. Normalmente, são constituídas por uma laje de betão apoiada em elementos metálicos (Fig. 3.6). Esta solução é extremamente eficiente em regiões de momentos positivos, pois tira partido da resistência do betão à compressão e do aço à tração, levando por isso a um desempenho em termos de rigidez e resistência aprimorado quando comparado com a contribuição dos dois componentes considerados isoladamente. A ação mista é providenciada por meio de dispositivos mecânicos (conectores de corte), soldados ou aparafusados no banzo superior do perfil de aço e inseridos no betão. Exemplos destes dispositivos são ilustrados na Fig. 3.7.

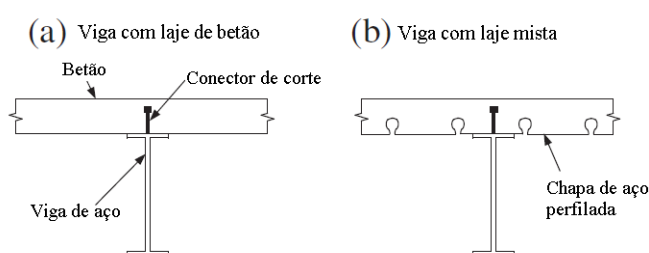


Figura 3.6: Vigas mistas típicas [78]

A resposta mista em condições de serviço é altamente dependente da deformabilidade dos conectores de corte, que podem permitir movimentos relativos entre a laje e a viga de aço. Quando pode ocorrer deslizamento entre os dois componentes, tal é normalmente designado de interação de corte parcial. Se não existe escorregamento a interação de corte é total. Na Fig. 3.8 são ilustrados estes conceitos.

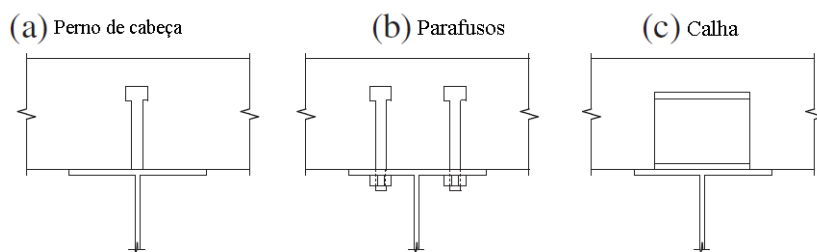


Figura 3.7: Dispositivos mecânicos típicos usados para transferir a força de corte [78]

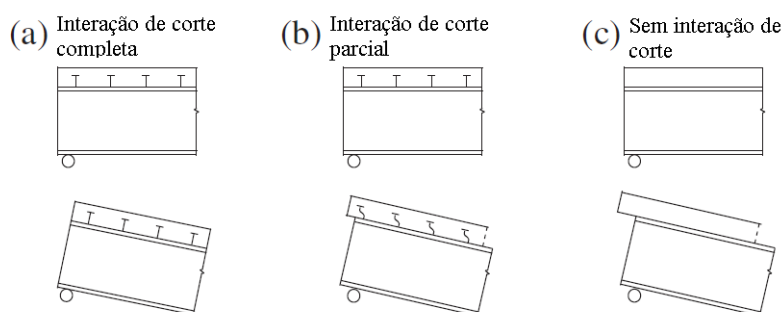


Figura 3.8: Classificação da interação de corte em função do escorregamento [78]

3.3.1 Comportamento de longo prazo do betão

As propriedades dependentes do tempo do betão usadas para descrever o comportamento de longo prazo de uma viga mista são as especificadas para estruturas de betão armado no caso da componente de betão corresponder a uma laje maciça de betão. Na presença de lajes mistas, as propriedades do betão são afetadas pelas diferentes condições de secagem providenciadas pela chapa perfilada de aço.

Pesquisas desenvolvidas por Gilbert et al. [45] confirmaram o desenvolvimento de retração não-uniforme em lajes mistas. Apenas recentemente foram desenvolvidas pesquisas experimentais que realçaram a necessidade de ter em conta uma distribuição não-uniforme da retração na verificação das condições de serviço de lajes mistas. O gradiente de retração é resultante da presença da chapa perfilada, que não permite a libertação da humidade na face inferior da laje. Normalmente, os Engenheiros têm adotado uma distribuição uniforme da retração, confiando nas diretrizes do betão armado. Assume-se que esta opção é conservativa considerando que a menor área de exposição da laje mista implica uma menor secagem e, conseqüentemente, uma menor magnitude da retração, quando comparado com a laje exposta em ambas as faces. Na realidade, a presença da chapa perfilada induz um gradiente na direção da espessura da laje mista e este comportamento foi observado experimentalmente em [84, 2].

A representação qualitativa das deformações totais induzidas pela retração ao

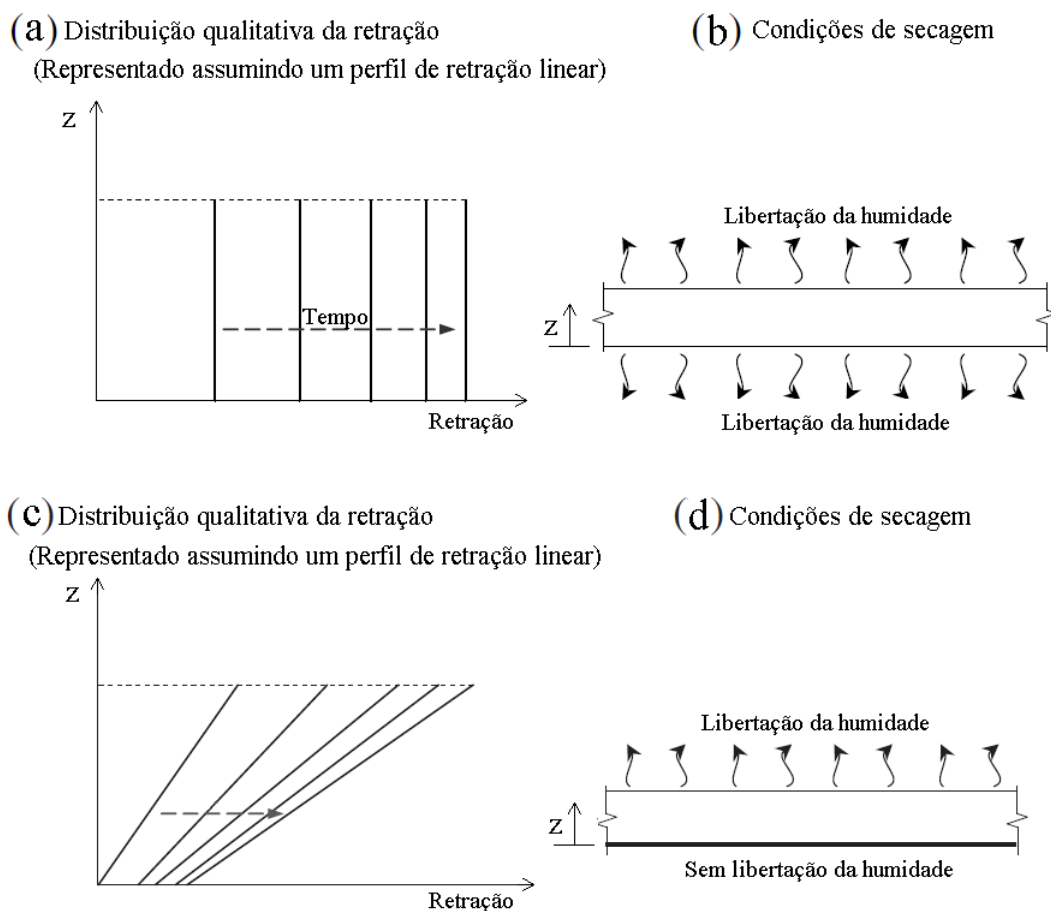


Figura 3.9: Condições de secagem e distribuição qualitativa da retração numa laje exposta em ambas as faces [78]

longo da secção transversal da laje é ilustrada nas Figs. 3.9a e 3.9c. Estas refletem os perfis de retração livre com o pressuposto de que é descrita por uma distribuição linear. Obviamente, polinómios de ordem superior, ou outras funções, podem ser consideradas para conseguir uma análise mais refinada mesmo que uma distribuição linear seja suficiente para efeitos de projeto [46]. A Fig. 3.9a representa o caso da retração constante normalmente usada em lajes de betão convencionais expostas em ambas as faces (Fig. 3.9b). A distribuição da retração para uma laje mista exposta apenas numa face (Fig. 3.9d) é representada na Fig. 3.9c que mostra o gradiente significativo que se desenvolve através da secção transversal ao longo do tempo. É necessário especificar a retração não-uniforme da retração nos cálculos para uma representação precisa da resposta de longo termo de lajes mistas.

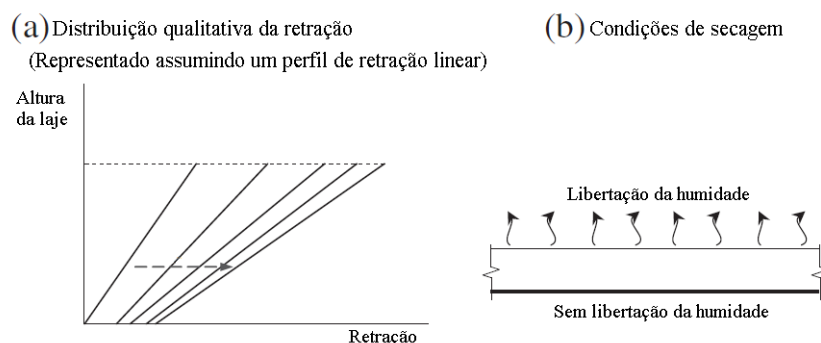


Figura 3.10: Condições de secagem e distribuição qualitativa da retração numa laje exposta apenas numa face [78]

3.3.2 Análise e modelação dependente do tempo

Até à data foram desenvolvidos trabalhos extensivos relativos à modelação de vigas mistas tendo em conta os efeitos diferidos. As primeiras publicações nesta área relataram problemas de serviço observados em casos reais, e.g. [80, 67], enquanto que os modelos iniciais para captar a resposta mista dependente do tempo basearam-se na teoria de interação de corte completa, e.g. [42, 43, 24, 99]. Nos anos seguintes estas formulações foram alargadas à contabilização de vários tipos de efeitos não-lineares dos materiais e de diferentes modelos do comportamento dependente do tempo do betão, e.g. [53, 14, 60, 59, 44, 20, 9, 88], bem como a vigas de eixo curvilíneo [47].

Os efeitos da deformabilidade dos conectores de corte na resposta mista dependente do tempo foram inicialmente estudados numericamente no início de 1990, e.g. [87, 18, 19, 28, 29, 25, 12]. No mesmo período, os primeiros ensaios de longo prazo realçaram a importância de ter em conta a interação parcial de corte para obter resultados mais precisos [53, 17, 16, 6, 5, 98].

Nos anos seguintes foram propostos métodos de análise mais refinados com o objetivo de desenvolver formulações mais rigorosas ou mais fáceis de utilizar, em muitos casos com considerações para o betão fendilhado e outros efeitos não-lineares dos materiais. Estas formulações foram baseadas em soluções numéricas, na sua maioria implementadas com o método dos elementos finitos, e.g. [56, 38, 39, 94, 55, 75, 40, 23, 22, 82, 66, 34], em soluções analíticas, e.g. [76], e no método da rigidez, e.g. [35, 74, 77, 72, 71].

A precisão de métodos algébricos [46, 31, 10] para descrever o comportamento dependente do tempo do betão, para possível utilização em cálculos de projeto, foi analisada em [26, 27, 7]. Foi observado que, enquanto o método do módulo efetivo de idade ajustada (*AEMM-Age-Adjusted Effective Modulus Method*) produz bons resultados quando se lida com ações estáticas, os efeitos da retração são melhor previstos com o *Mean Stress Method* [26, 27]. Considerações sobre as diretivas Europeias são fornecidas em [54, 8].

Pesquisas experimentais e de modelação recentes focaram-se no comportamento

misto de longo prazo em regiões de momentos negativos, e.g [2, 36, 37, 3, 4]. Foi proposto um modelo dependente do tempo para a conexão de corte em [2, 3] para prever a resposta de fluência em vigas mistas devida a carregamentos contínuos. Os primeiros ensaios "push-out" com lajes de betão e mistas foram relatados em [2, 3, 4]. No caso dos efeitos da retração, Al Deen et al. [3] observaram experimentalmente o desenvolvimento de retração não-uniforme e salientou a necessidade de a ter em conta para uma previsão mais precisa das flechas de longo prazo. Este aspeto é particularmente relevante em sistemas de pisos modernos, que tendem a vencer grandes vãos, com cada vez menos colunas. Foi proposta uma aproximação simplificada em [3], para fins de projeto, para ter em conta a ocorrência de gradientes de retração. Foram propostos modelos analíticos capazes de ter em conta estes gradientes em [79, 13].

Modelações considerando que não existe escorregamento na conexão

Tehami e Ramdane [88], apresentaram um modelo analítico, baseado num sistema de duas equações diferenciais lineares, para descrever o comportamento de longo prazo de uma viga mista sujeita à flexão, assumindo que não existe escorregamento na interface aço-betão. entre o aço e o betão. A influência do betão é tida em conta considerando a viscoelasticidade linear. Os resultados obtidos através deste modelo são considerados satisfatórios.

Fan et al. [37] elaboraram um modelo analítico baseado na teoria de interação de corte completa e num procedimento de incremental no tempo para analisar os efeitos da fluência, retração e fendilhação no comportamento de longo prazo de vigas mistas sujeitas a cargas de serviço, considerando as zonas de momentos positivos e negativos. Estes autores propuseram também um método para calcular a altura máxima de fendilhação na laje de betão considerando os efeitos da retração e da fluência. Com este modelo, analisaram quatro vigas mistas sujeitas a um carregamento contínuo com a duração de 3 anos e efetuaram a comparação com os resultados experimentais obtidos em [36], observando um bom ajuste. Discutiram ainda os coeficientes do método do módulo efetivo de idade ajustada (AAEM) para diferentes condições de carregamento.

Modelações considerando que existe escorregamento na conexão

Ranzi e Bradford [76] apresentaram uma modelação para a análise diferida de vigas mistas aço-betão com interação de corte parcial, considerando a deformabilidade dos conectores de corte. Os efeitos considerados na modelação são os resultantes da retração e fluência da laje de betão e são modelados através de modelos viscoelásticos algébricos tais como o método do módulo efetivo de idade ajustada (AAEM) e o *mean stress method* (MS). O modelo é aplicado a vigas mistas simplesmente apoiadas, encastradas-encastradas e encastradas-apoiadas, sujeitas a carregamentos distribuídos e a deformações de retração impostas. O modelo tem como principal finalidade a aferição

de formulações de elementos finitos e diferenças finitas, que requerem uma discretização espacial bem como uma discretização temporal.

Jurkiewicz et al. [55] propuseram um modelo para a análise de longo prazo de vigas mistas sujeitas a carregamentos de serviço que tem em conta os deslocamentos relativos na interface entre o aço e o betão e o comportamento dependente do tempo do betão de acordo com a formulação incremental da viscoelasticidade linear. Ao longo de cada intervalo temporal, o incremento da resposta mecânica do elemento estrutural é governado por uma equação diferencial de segunda ordem análoga à do caso elástico, com uma solução teórica. O modelo proposto é validado através da comparação com a formulação integral geral e é verificada com resultados experimentais.

Ranzi e Bradford [77] apresentaram uma técnica de modelação baseada no método da rigidez (DSM - *direct stiffness method*) para descrever o comportamento diferido de vigas mistas com interação parcial de corte tendo em conta a retração e a fluência da laje. O comportamento dependente do tempo do betão é modelado recorrendo a métodos algébricos, tais como o método do módulo efetivo de idade ajustada (AAEM method - *age-adjusted effective modulus method*) e o *mean stress method* (MS), enquanto que a viga de aço, o reforço e os conectores de corte assume-se ter comportamento elástico. No presente modelo, bem como noutras formulações baseadas no método da rigidez, apenas é necessária a discretização no domínio do tempo. O método proposto é então validado através de soluções analíticas com fins de aferição de modelos numéricos.

Virtuoso e Vieira [94] efetuaram uma análise não-linear através do método dos elementos finitos (MEF) baseado na aproximação de esforços, considerando a deformabilidade dos conectores de corte. O comportamento viscoelástico é considerado através de um processo incremental no tempo por um método numérico baseado na aproximação da fluência por um número finito de termos da série de Dirichelet. No presente estudo são analisadas as tensões, a redistribuição das forças internas bem como os deslocamentos associados. É também considerada a não-linearidade da conexão entre a viga de aço e o banzo de betão.

Fragiacomo et al. [39] desenvolveram um método numérico para estudar vigas mistas de aço e betão, tanto em análises de colapso como análises do comportamento em serviço. O modelo desenvolvido é uniaxial e é baseado num elemento finito formulado com a aproximação de deslocamentos. É considerado a flexibilidade dos conectores, os fenómenos reológicos (fluência e retração) e o comportamento não-linear dos materiais (fendilhação do betão, comportamento não-linear da conexão, contribuição das armaduras e da viga de aço). A fluência do betão é modelada usando o modelo generalizado Maxwell através de um procedimento incremental no tempo. O comportamento não-linear dos materiais é considerado através de um procedimento iterativo não-linear denominado de "método da rigidez secante modificada". Comparações com dados experimentais demonstraram a precisão do modelo proposto na capacidade para prever o comportamento estrutural real, tanto em ensaios de curto prazo com cargas de

colapso como em ensaios de longo prazo sujeitos a cargas de serviço.

Nguyen et al. [71] apresentaram um elemento finito baseado na formulação da teoria geometricamente exata de vigas, para vigas mistas com interação parcial. Os efeitos diferidos considerados são a fluência e a retração. O modelo constitutivo considerado para descrever os efeitos diferidos é a viscoelasticidade linear com coeficientes dependentes do tempo para contabilizar o envelhecimento. Usando as relações constitutivas discretizadas no tempo, as equações de equilíbrio são resolvidas analiticamente em termos de deslocamentos para um instante genérico. A matriz de rigidez é deduzida para um elemento de viga mista genérico com base nas expressões analíticas dos deslocamentos e das forças internas. A matriz de rigidez num procedimento baseado nos deslocamentos para análise dependente do tempo de vigas mistas contínuas com apoios e carregamentos arbitrários. Esta formulação requer um número mínimo de elementos dependendo das condições de apoio e carregamento. O modelo proposto é usado para calcular as flechas de curto e longo prazo com objetivo de avaliar o método proposto no EC4. A fluência, a retração e o grau de conexão de corte também são analisados em vigas simplesmente apoiadas. Conclui-se que o EC4 subestima a flecha de longo prazo e que a contribuição da retração para a flecha mais significativa que o sugerido pelo EC4 [33].

Capítulo 4

Exemplos de Aplicação

4.1 Introdução

No presente capítulo aplicam-se os conceitos e algoritmos estudados no capítulo 2 a um problema de uma coluna mista aço-betão com aderência perfeita entre os materiais. Serão calculados e analisados os dois fenómenos viscoelásticos, fluência e relaxação, com os dois modelos viscoelásticos estudados, os modelos generalizados de Maxwell e de Kelvin.

4.2 Exemplo 1: coluna mista sujeita a esforço axial constante

Considere-se o problema em que uma coluna mista com perfil de aço totalmente betonada é sujeita a esforço axial constante (Fig. 4.1). Pretende-se calcular o deslocamento resultante do efeito da fluência.

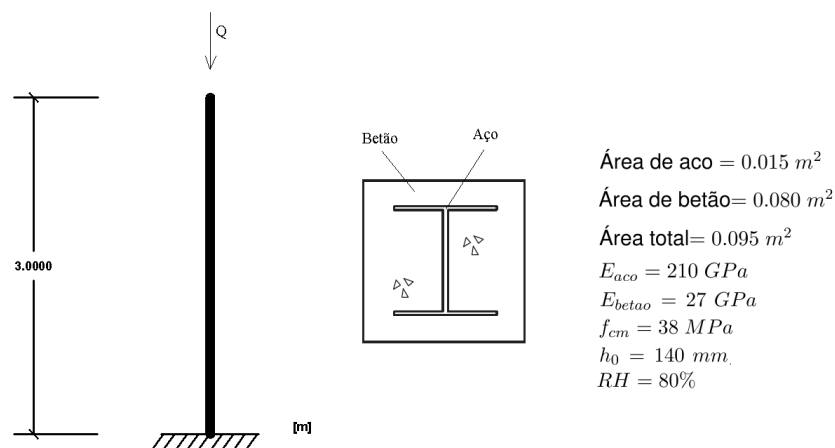


Figura 4.1: Exemplo 1: coluna mista sujeita a uma força constante Q

4.2.1 Modelo generalizado de Maxwell

```
function u=deslocamentocolunafluenciaMaxwell(L,Aaco,Abetao,Eaco,Ebetao,lambda,Q0)

n=101;
vdepD=zeros(n,1);vdepSs=zeros(n,1); %Inicialização das matrizes
vdepSaco=zeros(n,1); vdepSbetao=zeros(n,1);Ss=zeros(size(Ebetao,2),1);
T=zeros(n,1);

for i=1:n %Matriz do tempo
    T(i,1) = 10^(.1*(i-51));
end

somatorio=0;
for i=1:size(lambda,2)
    somatorio=somatorio+Ebetao(1,i+1)*lambda(1,i)*(1-exp(-T(1,1)/lambda(1,i)))/T(1,1);
end

D=Q0/(Abetao*(Ebetao(1,1)+somatorio)+Aaco*Eaco); vdepD(1,1)=D; %Deformação inicial

for e=1:size(Ebetao,2) %Tensão inicial nos elementos de Maxwell
    Ss(e,1)=D*Ebetao(1,e);
    vdepSs(1,1)=Ss(e,1);
end

Sbetao=sum(Ss); vdepSbetao(1,1)=Sbetao; %Tensão inicial no Betão
Saco=Q0/(Aaco+Abetao)-Sbetao; vdepSaco(1,1)=Saco; %Tensão inicial no Aço

for i=2:n %Ciclo de implementação do algoritmo incremental
    soma1=0; soma2=0;
    dT=(T(i,1)-T(i-1,1));
    for e=1:size(lambda,2) %Implementação do algoritmo incremental
        soma1=soma1+Ss(e+1,1)*(1-exp(-dT/lambda(1,e)));
        soma2=soma2+(1-exp(-dT/lambda(1,e)))*Ebetao(1,e+1)*lambda(1,e)/dT;
    end
    dD=soma1*Abetao/(Abetao*(Ebetao(1,1)+soma2)+Eaco*Aaco);

    D=D+dD; vdepD(i,1)=D; %Atualização e armazenamento das variáveis:

    Ss(1,1)=D*Ebetao(1,1); %Tensão nos elementos de Maxwell
    for e=2:size(Ebetao,2)
        resto(e,1)=Ebetao(1,e)*dD*lambda(1,e-1)*(1-exp(-dT/lambda(1,e-1)))/dT;
        Ss(e,1)=Ss(e,1)*exp(-(T(i,1)-T(i-1,1))/lambda(1,e-1))+resto(e,1)
        vdepSs(i,e)=Ss(e,1);
    end

    Sbetao=sum(Ss); vdepSbetao(i,1)=Sbetao; %Tensão no betão
    Saco=Q0/(Aaco+Abetao)-Sbetao; vdepSaco(i,1)=Saco;
end
u=D*L; %Valor de saída
end
```

Figura 4.2: Rotina de implementação do algoritmo incremental para o cálculo do deslocamento devido à fluência numa coluna mista com o modelo generalizado de Maxwell.

Para o cálculo do deslocamento por fluência com o modelo generalizado de Maxwell, foi criada a rotina da Fig. 4.2 para implementar a Eq. (2.163). Os dados de entrada são: o comprimento da coluna (L), a área de aço (A_{aco}), a área de betão (A_{betao}), o módulo de elasticidade do aço (E_{aco}), a matriz linha com os valores dos módulos de elasticidade da expansão de Dirichlet de Maxwell (E_{betao}), a matriz linha com os valores dos tempos de relaxação da expansão de Dirichlet de Maxwell e o valor da força axial imposta (Q_0). Os dados de saída são: o valor

do deslocamento final da coluna (u) e os valores das tensões no aço (S_{aco}) e no betão (S_{betao}), os quais são guardados em matrizes para eventual representação gráfica. A rotina começa por calcular a deformação inicial na secção mista, as tensões iniciais nos dois materiais e nos elementos da cadeia de Maxwell. Constrói a matriz que guarda os pontos do domínio de cálculo segundo a regra $T(i, 1) = 10^{0.1 \times (i-52)}$, sendo o domínio definido de 10^{-5} a 10^5 . Em cada passo de cálculo é obtido o incremento de deformação com a Eq. (2.163) utilizando os valores das tensões nos elementos de Maxwell calculados no passo de cálculo anterior. A tensão em cada elemento Maxwell é calculada com a Eq. (2.116). Os valores das variáveis são guardados em matrizes e inicia-se um novo passo de cálculo.

A rotina da Fig. 4.2 foi executada com os dados do problema da Fig. 4.1, da Tab. 2.3 e para uma força axial imposta $Q = 1 \text{ MN}$. A deformação total calculada é apresentada na Fig. 4.3a e a evolução das tensões nos dois materiais são apresentados na Fig. 4.3b.

Analisando o gráfico da Fig. 4.3b constata-se que existe uma redistribuição de esforços entre o betão e o aço devido à fluência do betão. De facto, como existe aderência perfeita os dois materiais e o betão apresenta deformação por fluência, parte do esforço axial inicialmente aplicado no betão é transferido para o aço. É por esse motivo que toda a secção apresenta deformação por fluência como se pode verificar ao analisar o gráfico da Fig. 4.3a.

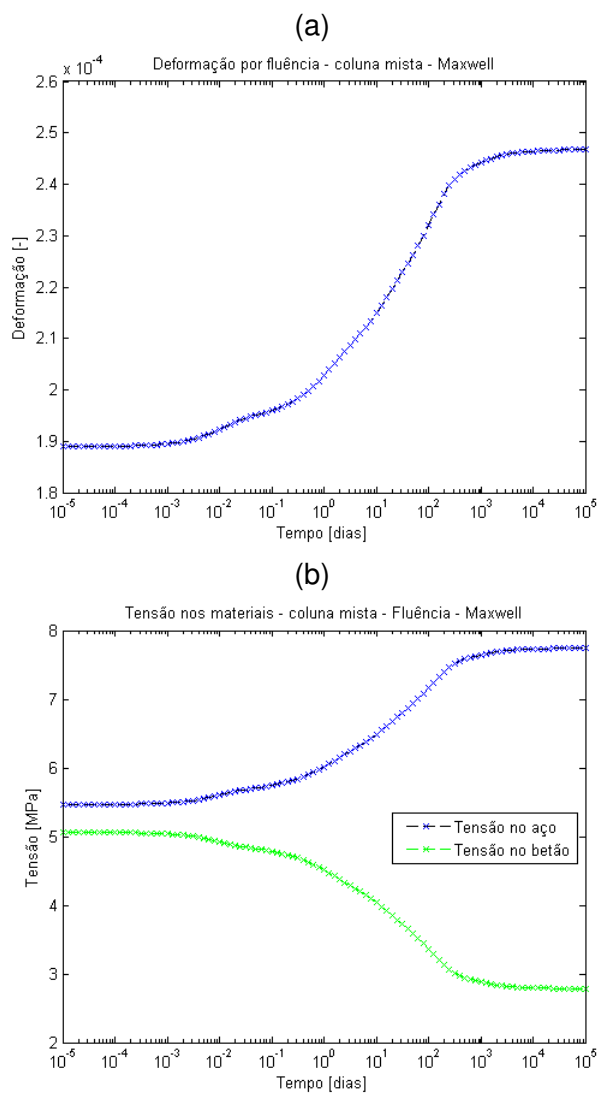


Figura 4.3: Exemplo 1: resolução com o modelo generalizado de Maxwell: (a) Deformação total; (b) Evoluções da tensão nos materiais.

4.2.2 Modelo generalizado de Kelvin

```

function u=deslocamentocolunafluenciaKelvin(L,Aaco,Abetao,Eaco,Ebetao,lambdaj,Q0)

n=101;
vdepD=zeros(n,1); vdepSaco=zeros(n,1); %Inicialização das matrizes
vdepSbetao=zeros(n,1); es=zeros(size(Ebetao,2),1);
T=zeros(n,1); resto=zeros(size(Ebetao,2),1);

for i=1:n %Matriz do tempo
    T(i,1) = 10^(.1*(i-51));
end

soma=0;
for i=1:size(lambdaj,2)
    soma=soma+((1/Ebetao(1,i+1))*(1-lambdaj(1,i)*(1-exp(-T(1,1)/lambdaj(1,i)))/T(1,1)));
end
D=Q0/(Abetao*(1/(1/Ebetao(1,1)+somatorio))+Aaco*Eaco); %Deformação inicial
vdepD(1,1)=D;
Sbetao=D*(1/(1/Ebetao(1,1)+somatorio)); %Tensão inicial no Betão
vdepSbetao(1,1)=Sbetao;
ST=Q0/(Abetao+Aaco); %Tensao na secção
Saco=ST-Sbetao; vdepSaco(1,1)=Saco; %Tensão inicial no Aço

for e=2:size(Ebetao,2) %Valor inicial das variáveis de estado
    es(e,1)=Sbetao/Ebetao(1,e);
end

for i=2:n %Ciclo de implementação do algoritmo incremental
    soma1=0; soma2=0;
    dT=(T(i,1)-T(i-1,1));
    for e=1:size(lambdaj,2) %Implementação do algoritmo incremental
        soma1=soma1+es(e+1,1)*(1-exp(-dT/lambdaj(1,e)));
        soma2=soma2+(1/Ebetao(1,e+1))*(1-lambdaj(1,e)*(1-exp(-dT/lambdaj(1,e)))/dT);
    end
    dD=Abetao*(soma1/(1/Ebetao(1,1)+soma2))/(Abetao*(1/(1/Ebetao(1,1)+soma2))+Aaco*Eaco);
    %Atualização e armazenamento das variáveis:
    D=D+dD; vdepD(i,1)=D; %Deformação total

    dSbetao=((dD-soma1)/(1/Ebetao(1,1)+soma2)); %Variação da tensão no betão
    for e=2:size(Ebetao,2) %variável de estado
        resto(e,1)=dSbetao*lambdaj(1,e-1)*(1-exp(-dT/lambdaj(1,e-1)))/(Ebetao(1,e)*dT);
        es(e,1)=es(e,1)*exp(-(T(i,1)-T(i-1,1))/lambdaj(1,e-1))+resto(e,1);
    end

    Sbetao=Sbetao+dSbetao; vdepSbetao(i,1)=Sbetao; %Tensão no betão
    Saco=ST-Sbetao; vdepSaco(i,1)=Saco; %Tensão no aço
end
u=D*L; %Valor de saída
end

```

Figura 4.4: Rotina de implementação do algoritmo incremental para o cálculo do deslocamento devido à fluência numa coluna mista com o modelo generalizado de Kelvin

A Eq. (2.168), deduzida a partir do modelo generalizado de Kelvin, é implementada na rotina da Fig. 4.4, que tem como função calcular o deslocamento por fluência. Os dados de entrada da rotina são: o comprimento da coluna (L), a área de aço (A_{aco}), a área de betão (A_{betao}), o módulo de elasticidade do aço (E_{aco}), a matriz linha com os valores dos módulos de elasticidade da expansão de Dirichlet de Kelvin (E_{betao}), a matriz linha com os valores dos tempos de retardação da expansão de Dirichlet de Kelvin e o valor da força axial imposta (Q_0). Os dados de

saída são: o valor do deslocamento final da coluna (u) e os valores das tensões no aço (S_{aco}) e no betão (S_{betao}) são guardados em matrizes para eventual representação gráfica. Os primeiros cálculos são a deformação inicial na secção mista com a Eq. (2.168), as tensões iniciais nos dois materiais e as variáveis de estado iniciais com a Eq. (2.127). É obtida definida a matriz que guarda os pontos do domínio de cálculo segundo a regra $T(i, 1) = 10^{0.1 \times (i-52)}$, sendo o domínio definido de 10^{-5} a 10^5 . É programado um ciclo onde e em cada passo de cálculo é obtido o incremento de deformação com a Eq. (2.168) utilizando os valores das variáveis de estado calculados no passo de cálculo anterior. O valor das variáveis de estado é calculado com a Eq. (2.126), neste caso, com a particularidade de se ter que usar a Eq. (2.128) para calcular a variação da tensão no betão $\Delta\sigma$ transferida do betão para o aço. Os valores das variáveis são guardados em matrizes e começa um novo passo de cálculo.

A rotina da Fig. 4.4 foi executada com os dados do problema da Fig. 4.1, da Tab. 2.6 e para uma força axial imposta $Q = 1 \text{ MN}$. A deformação total calculada é apresentada na Fig. 4.5a e a evolução das tensões nos dois materiais são apresentados na Fig. 4.5b.

Na Fig. 4.6 apresenta-se a comparação das soluções de fluência com os dois modelos estudados.

Observando as curvas ilustradas na Fig. 4.6a constata-se que, embora os valores iniciais e a tempo infinito obtidos pelos dois modelos sejam muito semelhantes, o andamento das curvas difere bastante. A qualidade do ajustamento das expansões de Dirichlet é determinante neste aspeto. Mas como foi visto anteriormente, no caso da fluência, o modelo mais adequado é modelo generalizado de Kelvin pelo facto de fornecer valores exatos. Verifica-se também que, observando a Fig. 4.6b, a fluência no betão resulta numa transferência de tensão entre o betão e o aço.

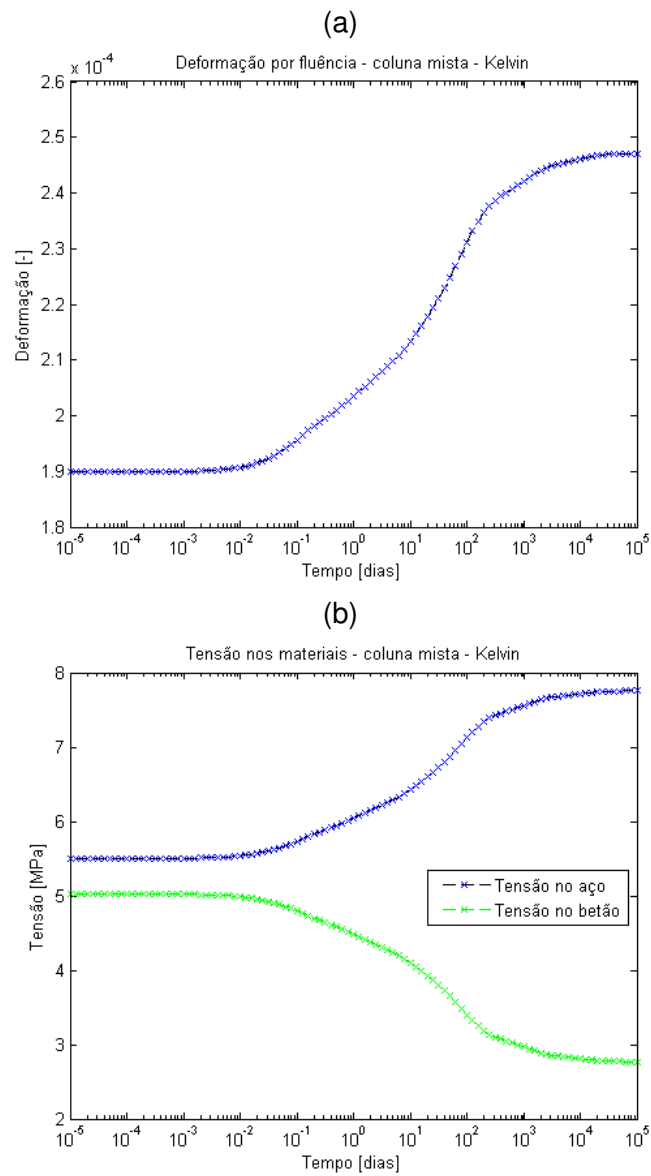


Figura 4.5: Exemplo 1: resolução com o modelo generalizado de Kelvin: (a) Deformação total; (b) Evoluções da tensão nos materiais.

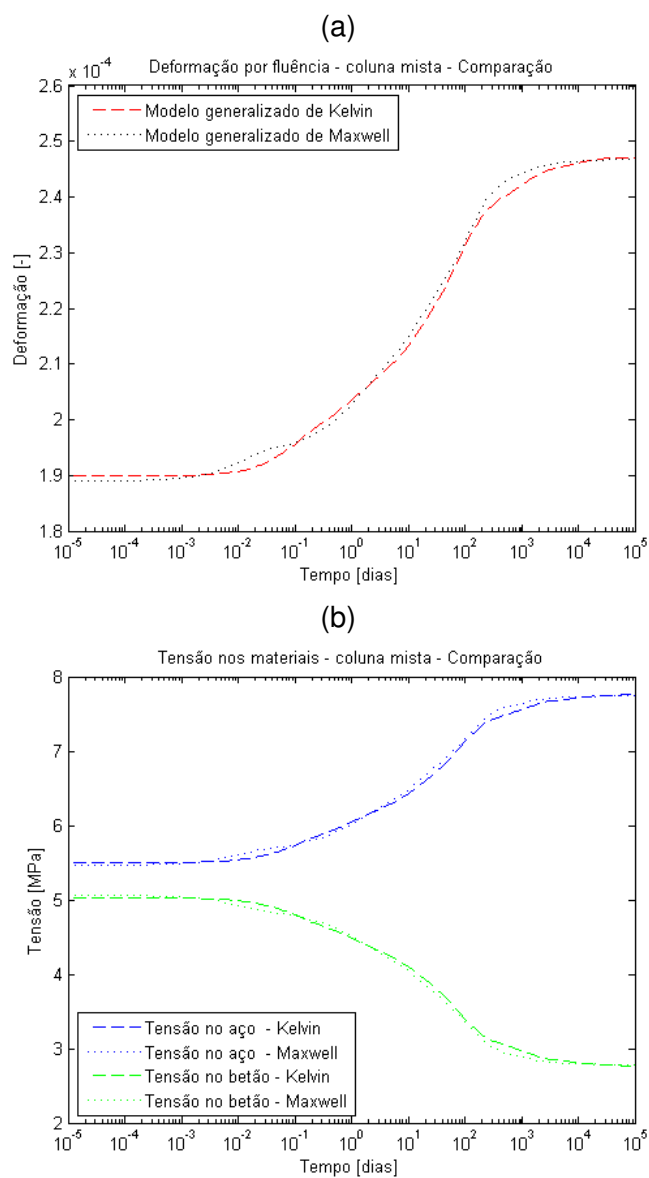


Figura 4.6: Exemplo 1: Comparação entre os resultados obtidos com os dois modelos estudados: (a) Deformação total; (b) Evoluções da tensão nos materiais.

4.3 Exemplo 2: coluna mista sujeita a deslocamento imposto

Considere-se agora que a coluna do problema anterior é sujeita a um deslocamento imposto (constante) (Fig. 4.7). Pretende-se calcular as tensões resultantes da relaxação.

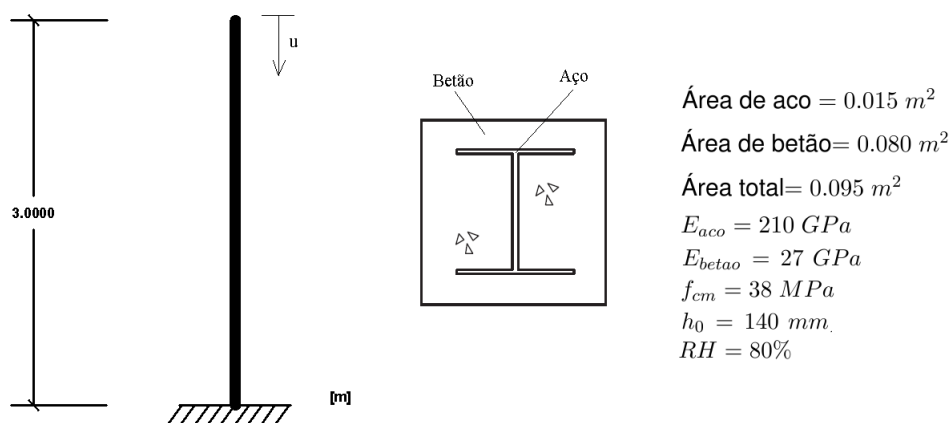


Figura 4.7: Exemplo 2: coluna mista sujeita a um deslocamento imposto.

4.3.1 Modelo generalizado de Maxwell

A rotina 4.8 calcula a relaxação da coluna mista da Fig. 4.7 com a Eq. (2.164), algoritmo deduzido com base no modelo generalizado de Maxwell. Os dados de entrada são: o comprimento da coluna (L), a área de aço (A_{aco}), a área de betão (A_{betao}), o módulo de elasticidade do aço (E_{aco}), a matriz linha com os valores dos módulos de elasticidade da expansão de Dirichlet de Maxwell (E_{betao}), a matriz linha com os valores dos tempos de relaxação da expansão de Dirichlet de Maxwell e o valor do deslocamento axial imposto (u_0). Os dados de saída são: o valor do esforço axial final (Q) e guarda ainda os valores das tensões no aço (S_{aco}) e no betão (S_{betao}). A rotina começa por calcular a deformação inicial, o esforço axial inicial, a tensão no aço inicial e a tensão no betão e nos elementos da cadeia de Maxwell iniciais. É definida a matriz que guarda os pontos do domínio de cálculo segundo a regra $T(i, 1) = 10^{0.1 \times (i-52)}$ num domínio compreendido entre 10^{-5} e 10^5 . Em cada passo de cálculo é obtido o incremento de esforço axial com a Eq. (2.164) utilizando os valores das tensões nos elementos de Maxwell calculados no passo de cálculo anterior. Os valores das variáveis são guardados em matrizes e inicia-se um novo passo de cálculo.

A rotina da Fig. 4.8 foi executada com os dados do problema da Fig. 4.7, da Tab. 2.3 e para um deslocamento inicial imposto $u = 0.001 \text{ m}$. O esforço axial

```

function Q=esforcocolumarelaxacaoMaxwell(L,Aaco,Abetao,Eaco,Ebetao,lambda,u0)

n=101;
vdepQ=zeros(n,1);vdepSaco=zeros(n,1); %Inicialização das matrizes
vdepSbetao=zeros(n,1);Ss=zeros(size(Ebetao,2),1); T=zeros(n,1);

for i=1:n %Matriz do tempo
    T(i,1) = 10^(.1*(i-51));
end

soma=0;
for i=1:size(lambda,2)
    soma=soma+Ebetao(1,i+1)*lambda(1,i)*(1-exp(-T(1,1)/lambda(1,i)))/T(1,1);
end

e0=u0/L; %Deformação inicial
Q=e0*(Abetao*(Ebetao(1,1)+somatorio)+Aaco*Eaco); %Esforço axial inicial
vdepQ(1,1)=Q;

for e=1:size(Ebetao,2)
    Ss(e,1)=Ebetao(1,e)*e0; %Tensão inicial nos elementos
end

Sbetao=sum(Ss); vdepSbetao(1,1)=Sbetao; %Tensão no betão inicial
Qbetao=Sbetao*Abetao;
Qaco=Q-Qbetao;
Saco=Qaco/Aaco; vdepSaco(1,1)=Saco; %Tensão no aço inicial

for i=2:n %Ciclo de implementação do algoritmo incremental
    soma=0;
    for e=1:size(lambda,2) %Implementação do algoritmo incremental
        soma=soma+(1-exp(-(T(i,1)-T(i-1,1))/lambda(1,e)))*Ss(e+1,1);
    end
    dQ=-Abetao*soma;
    Q=Q+dQ; vdepQ(i,1)=Q; %Actualização e armazenamento das variáveis

    Ss(1,1)=Ebetao(1,1)*e0;
    for e=2:size(Ebetao,2) %Tensão nos elementos de Maxwell
        Ss(e,1)=Ss(e,1)*exp(-(T(i,1)-T(i-1,1))/lambda(1,e-1));
    end

    Sbetao=sum(Ss); vdepSbetao(i,1)=Sbetao; %Tensão no betão
    Qbetao=Sbetao*Abetao;
    Qaco=Q-Qbetao;
    Saco=Qaco/Aaco; vdepSaco(i,1)=Saco; %Tensão no aço
end
end

```

Figura 4.8: Rotina de implementação do algoritmo incremental para o cálculo do esforço axial devido à relaxação numa coluna mista com o modelo generalizado de Maxwell.

calculado é apresentado na Fig. 4.9a e a evolução das tensões nos dois materiais é apresentada na Fig. 4.9b.

Neste caso, não existe uma redistribuição de tensões nos dois materiais, dado que apenas ocorre relaxação no betão. A tensão no aço é constante e é resultante da deformação inicial constante a que o aço está sujeito. Já o betão apresenta relaxação a deformação constante o que é responsável pela diminuição do esforço axial total ao longo do tempo, como se pode verificar nos gráficos das Figs. 4.9a e 4.9b.

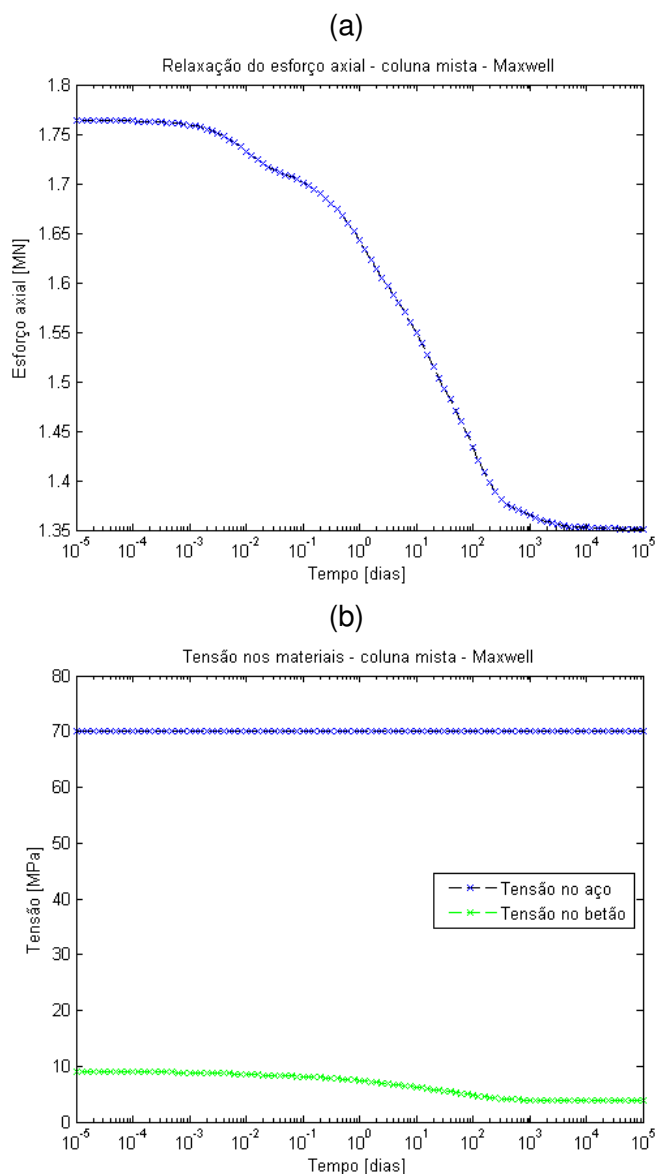


Figura 4.9: Exemplo 2: resolução com o modelo generalizado de Maxwell: (a) Esforço axial total; (b) Evoluções da tensão nos materiais.

4.3.2 Modelo generalizado de Kelvin

A rotina da Fig. 4.10 tem como função o cálculo do esforço axial resultante da relaxação com recurso ao algoritmo do modelo generalizado de Kelvin da Eq. (2.169). Os dados de entrada da rotina são: o comprimento da coluna (L), a área de aço (A_{aco}), a área de betão ($A_{betão}$), o módulo de elasticidade do aço (E_{aco}), a matriz linha com os valores dos módulos de elasticidade da expansão de Dirichlet de Kelvin ($E_{betão}$), a matriz linha com os valores dos tempos de retardação da expansão de Dirichlet de Kelvin e o valor do deslocamento axial imposto (u_0). Inicialmente, a rotina calcula a deformação inicial, o esforço axial

```

function Q=esforcocolumnarelaçaoKelvin(L,Aaco,Abetao,Eaco,Ebetao,lambdaj,u0)

n=101;
vdepQ=zeros(n,1); vdepSaco=zeros(n,1); %Inicialização das matrizes
vdepSbetao=zeros(n,1); T=zeros(n,1);

for i=1:n %Matriz do tempo
    T(i,1) = 10^(.1*(i-51));
end

som=0;
for i=1:size(lambdaj,2)
    som=som+((1/Ebetao(1,i+1))*(1-lambdaj(1,i)*(1-exp(-T(1,1)/lambdaj(1,i)))/T(1,1)));
end

e0=u0/L; %Deformação inicial
Q=e0*(Abetao*(1/(1/Ebetao(1,1)+somatorio))+Aaco*Eaco); %Esforço axial inicial
vdepQ(1,1)=Q;

Sbetao=e0*(1/(1/Ebetao(1,1)+somatorio)); %Tensão inicial no Betão
vdepSbetao(1,1)=Sbetao;
Qbetao=Sbetao*Abetao;
Qaco=Q-Qbetao;
Saco=Qaco/Aaco; vdepSaco(1,1)=Saco; %Tensão no aço inicial

for e=2:size(Ebetao,2) %Valor inicial das variáveis de estado
    es(e,1)=Sbetao/Ebetao(1,e);
end

for i=2:n
    soma1=0; soma2=0;
    dT=(T(i,1)-T(i-1,1))
    for e=1:size(lambdaj,2) %Implementação do algoritmo incremental
        soma1=soma1+es(e+1,1)*(1-exp(-dT/lambdaj(1,e)));
        soma2=soma2+(1/Ebetao(1,e+1))*(1-lambdaj(1,e)*(1-exp(-dT/lambdaj(1,e)))/dT);
    end
    dQ=-Abetao*(soma1/(1/Ebetao(1,1)+soma2)); %Atualização e armazenamento das variáveis
    Q=Q+dQ; vdepQ(i,1)=Q;

    dSbetao=dQ/Abetao; %Variação da tensão no betão
    for e=2:size(Ebetao,2) %variável de estado
        resto(e,1)=dSbetao*lambdaj(1,e-1)*(1-exp(-dT/lambdaj(1,e-1)))/(Ebetao(1,e)*dT);
        es(e,1)=es(e,1)*exp(-(T(i,1)-T(i-1,1))/lambdaj(1,e-1))+resto(e,1);
    end

    Sbetao=Sbetao+dSbetao; vdepSbetao(i,1)=Sbetao; %Tensão inicial no Betão
    Qbetao=Sbetao*Abetao;
    Qaco=Q-Qbetao;
    Saco=Qaco/Aaco; vdepSaco(i,1)=Saco; %Tensão no aço
end
end

```

Figura 4.10: Rotina de implementação do algoritmo incremental para o cálculo do esforço axial devido à relaxação numa coluna mista com o modelo generalizado de Kelvin.

inicial com a Eq. (2.169), a tensão no aço inicial, a tensão inicial no betão e os valores das variáveis de estado iniciais. Define a matriz que guarda os pontos do domínio de cálculo segundo a regra $T(i, 1) = 10^{0.1 \times (i-52)}$, sendo o domínio compreendido entre 10^{-5} e 10^5 . Em cada passo de cálculo é calculado o incremento de esforço axial com a Eq. (2.169) utilizando os valores das variáveis de estado calculados no passo de cálculo anterior. Os valores das variáveis são

guardados em matrizes e começa um novo passo de cálculo.

A rotina da Fig. 4.10 foi calculada com os dados do problema da Fig. 4.7, da Tab. 2.6 e para um deslocamento inicial imposto $u = 0.001 \text{ m}$. O esforço axial calculado é apresentado na Fig. 4.11a e a evolução das tensões nos dois materiais é apresentada na Fig. 4.11b.

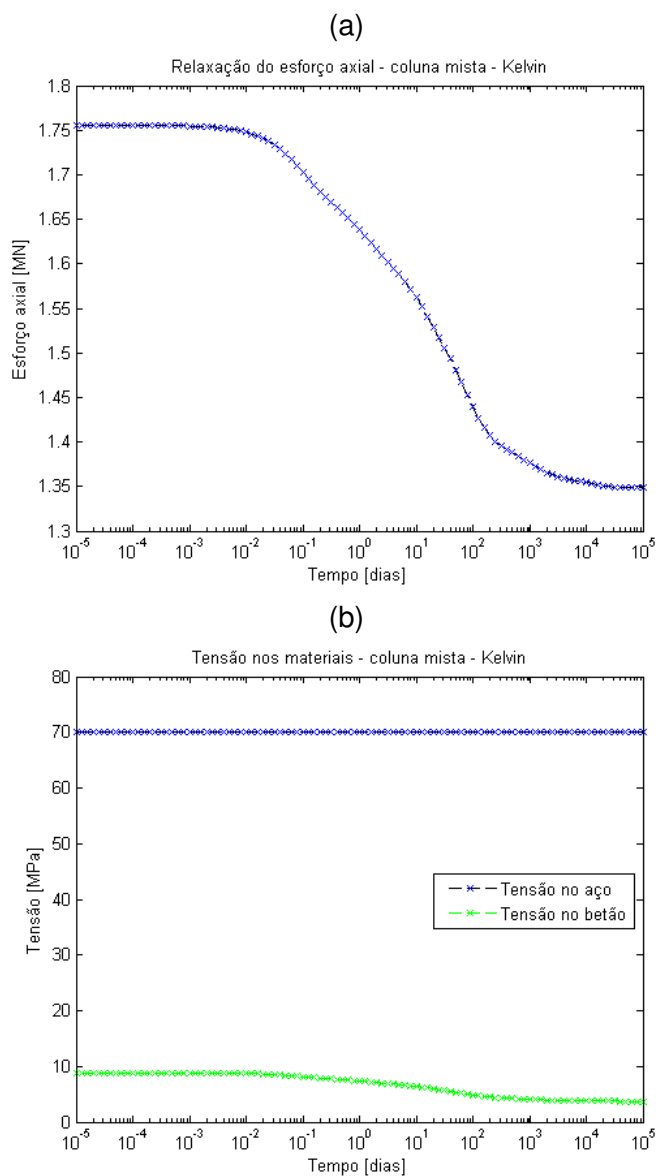


Figura 4.11: Exemplo 2: resolução com o modelo generalizado de Kelvin: (a) Esforço axial total; (b) Evoluções da tensão nos materiais.

Na Fig. 4.12 apresenta-se a comparação das soluções obtidas com os dois modelos estudados. Analisando a Fig. 4.12a pode-se verificar que a curva correspondente ao modelo generalizado de Kelvin sobrestima os valores das tensões, pois já foi visto que o modelo generalizado de Maxwell fornece valores exatos no cálculo da relaxação, pelo que é mais adequado para este tipo de

problemas. Ao analisar-se a Fig. 4.12b, constata-se que o efeito a longo prazo de uma deformação imposta numa coluna mista apenas resulta na relaxação do betão, não influenciando as tensões no aço.

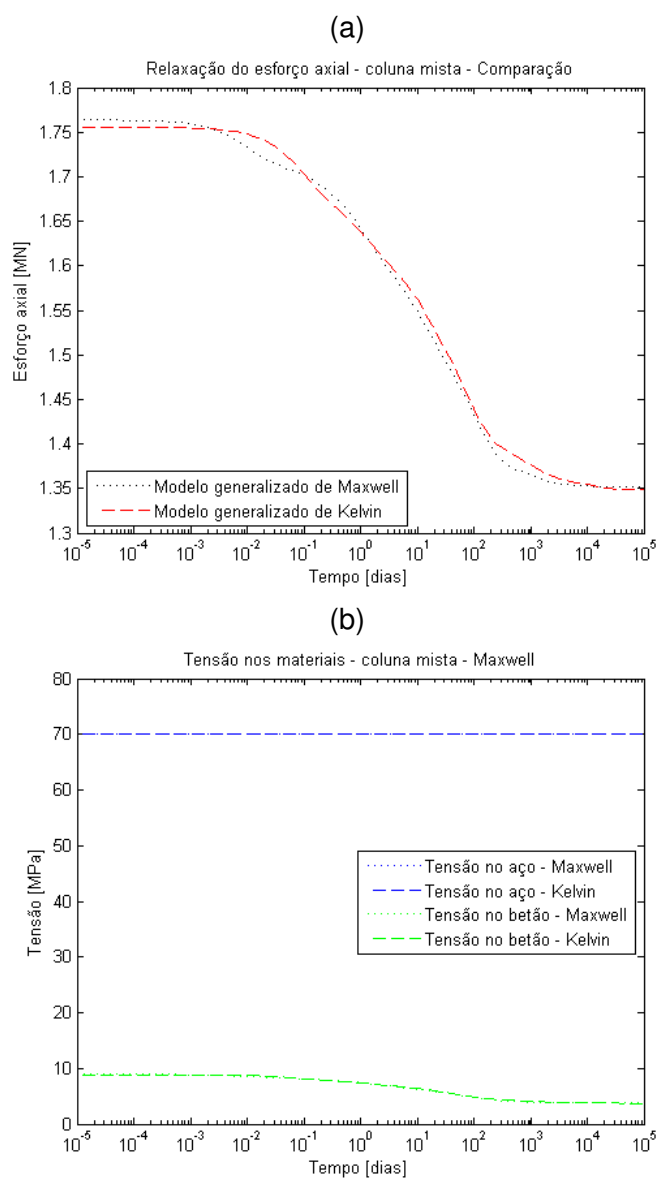


Figura 4.12: Exemplo 2: Comparação entre os resultados obtidos com os dois modelos estudados: (a) Tensão total; (b) Evoluções da tensão nos materiais.

4.4 Exemplo 3: Influência do faseamento construtivo

Com o objetivo de simular o faseamento construtivo de um edifício, considere-se agora que a coluna da Fig. 4.1 é sujeita a um histórico de tensões em instantes diferentes. Assuma-se que a coluna tem uma área de influência de 36 m^2 e está situada na base de um edifício com quatro pisos superiores com lajes fungiformes de 0.25 m de espessura. A Tab. 4.1 contém as cargas correspondentes à construção de cada piso e os respectivos instantes de aplicação. No instante inicial a carga corresponde ao peso da primeira laje e as restantes cargas correspondem ao peso de cada piso superior, isto é, peso da laje e peso da coluna de cada piso.

Instante de Aplicação [dias]	Carga [MN]
0	0.225
$10^{1.2} \simeq 15$	0.2345
$10^{1.5} \simeq 30$	0.2345
$10^{1.7} \simeq 50$	0.2345
$10^{1.8} \simeq 63$	0.2345

Tabela 4.1: Histórico de aplicação de tensões para o cálculo do deslocamento por fluência.

A rotina da Fig. 4.13 calcula o deslocamento por fluência para um histórico de tensões aplicadas e é muito semelhante à rotina da Fig. 4.4, com a particularidade de nos instantes de aplicação das cargas a variação da deformação ΔQ no algoritmo de cálculo corresponde às cargas aplicadas.

As Figs. 4.14a e 4.14b ilustram a resposta da coluna da Fig. 4.1 à aplicação das cargas da Tab. 4.1 e a tensão nos materiais utilizando os dois modelos estudados, modelos generalizados de Maxwell e de Kelvin.

```

function u=deslcolunafluenciaKelvinmulti(L,Aaco,Abetao,Eaco,Ebetao,lambdaj,Q0,dQ)

n=101;
vdepD=zeros(n,1); vdepes=zeros(n,1); vdepSaco=zeros(n,1); %Inicialização das matrizes
vdepSbetao=zeros(n,1); es=zeros(size(Ebetao,2),1);
T=zeros(n,1); resto=zeros(size(Ebetao,2),1);

for i=1:n %Matriz do tempo
    T(i,1) = 10^(.(1*(i-51)));
end

soma=0;
for i=1:size(lambdaj,2)
    soma=soma+((1/Ebetao(1,i+1))*(1-lambdaj(1,i)*(1-exp(-T(1,1)/lambdaj(1,i)))/T(1,1)));
end
D=Q0/(Abetao*(1/(1/Ebetao(1,1)+soma))+Aaco*Eaco); vdepD(1,1)=D; %Deformação inicial

Sbetao=D*(1/(1/Ebetao(1,1)+soma)); vdepSbetao(1,1)=Sbetao; %Tensão inicial no Betão
ST=Q0/(Abetao+Aaco); %Tensão na secção
Saco=ST-Sbetao; vdepSaco(1,1)=Saco; %Tensão inicial no Aço

for e=2:size(Ebetao,2) %Valor inicial das variáveis de estado
    es(e,1)=Sbetao/Ebetao(1,e);
    vdepes(1,1)=es(e,1);
end

for i=2:n
    T=T(i,1)-T(i-1,1); %Ciclo de implementação do algoritmo incremental
    if i==63||i==66||i==68||i==69 %Implementação do algoritmo incremental
        %nos instantes de aplicação de tensão

        s1=0; s2=0;
        for e=1:size(lambdaj,2)
            s1=s1+es(e+1,1)*(1-exp(-T/lambdaj(1,e)));
            s2=s2+(1/Ebetao(1,e+1))*(1-lambdaj(1,e)*(1-exp(-T/lambdaj(1,e)))/(T));
        end
        dD=(dQ+Abetao*(s1/(1/Ebetao(1,1)+s2)))/(Abetao*(1/(1/Ebetao(1,1)+s2))+Aaco*Eaco);
        %Atualização e armazenamento das variáveis:
        D=D+dD; vdepD(i,1)=D; %Deformação total

        dSbetao=((dD-s1)/(1/Ebetao(1,1)+s2)); %Variação da tensão no betão
        for e=2:size(Ebetao,2)
            resto(e,1)=dSbetao*lambdaj(1,e-1)*(1-exp(-T/lambdaj(1,e-1)))/(Ebetao(1,e)*(T));
            es(e,1)=es(e,1)*exp(-T/lambdaj(1,e-1))+resto(e,1); %variável de estado
            vdepes(i,e)=es(e,1);
        end

        Sbetao=Sbetao+dSbetao; vdepSbetao(i,1)=Sbetao; %Tensão no betão
        Saco=ST-Sbetao; vdepSaco(i,1)=Saco; %Tensão no aço
    else

        s1=0; s2=0;
        for e=1:size(lambdaj,2) %Implementação do algoritmo incremental
            s1=s1+es(e+1,1)*(1-exp(-T/lambdaj(1,e)));
            s2=s2+(1/Ebetao(1,e+1))*(1-lambdaj(1,e)*(1-exp(-T/lambdaj(1,e)))/(T));
        end
        dD=Abetao*(s1/(1/Ebetao(1,1)+s2))/(Abetao*(1/(1/Ebetao(1,1)+s2))+Aaco*Eaco);
        %Atualização e armazenamento das variáveis:
        D=D+dD; vdepD(i,1)=D; %Deformação total

        dSbetao=((dD-s1)/(1/Ebetao(1,1)+s2)); %Variação da tensão no betão
        for e=2:size(Ebetao,2)
            resto(e,1)=dSbetao*lambdaj(1,e-1)*(1-exp(-T/lambdaj(1,e-1)))/(Ebetao(1,e)*(T));
            es(e,1)=es(e,1)*exp(-(T(i,1)-T(i-1,1))/lambdaj(1,e-1))+resto(e,1); %v. de estado
            vdepes(i,e)=es(e,1);
        end

        Sbetao=Sbetao+dSbetao; vdepSbetao(i,1)=Sbetao; %Tensão no betão
        Saco=ST-Sbetao; vdepSaco(i,1)=Saco; %Tensão no aço
    end
end
end

```

Figura 4.13: Rotina de implementação do algoritmo incremental para o cálculo do deslocamento por fluência devido numa coluna mista com o modelo generalizado de Kelvin devido à aplicação do histórico de tensões da Tab. 4.1.

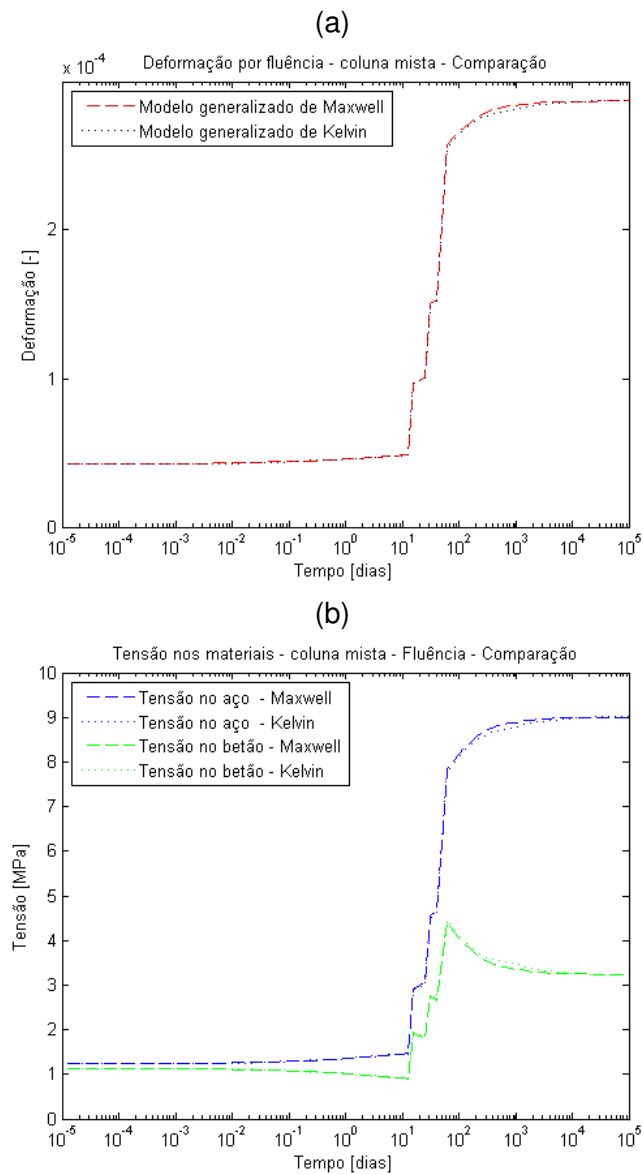


Figura 4.14: Exemplo 3: Comparação entre os resultados obtidos com os dois modelos estudados: (a) Deformação total; (b) Evoluções da tensão nos materiais.

Capítulo 5

Conclusões e desenvolvimentos futuros

5.1 Observações finais

No âmbito do presente trabalho foi estudada a modelação matemática e numérica da evolução das tensões e deformações com comportamento viscoelástico linear. Os materiais sólidos com propriedades viscoelásticas podem ser modelados com dois modelos matemáticos principais, nomeadamente o modelo generalizado de Maxwell e o modelo generalizado de Kelvin. Ambos permitem o cálculo dos dois fenómenos viscoelásticos, a fluência e a relaxação. A solução analítica da formulação diferencial do primeiro modelo, sujeito a um ensaio de relaxação, resulta numa expansão de Dirichlet de Maxwell, pela qual se pode expressar a função de relaxação. Inversamente, a solução analítica da formulação do segundo modelo resulta numa expansão de Dirichlet de Kelvin, pela qual se pode expressar a função de fluência. A obtenção de um algoritmo para o cálculo incremental da fluência e da relaxação pode ser concretizada substituindo as expansões de Dirichlet na formulação integral, obtendo assim dois algoritmos diferentes consoante a expansão de Dirichlet que se pretenda utilizar. No caso do betão, os parâmetros das expansões são obtidos ajustando-as às curvas regulamentares através do método dos mínimos quadrados. Finalmente, é feita a introdução do Principio dos trabalhos virtuais para obter uma formulação capaz de modelar os fenómenos viscoelásticos numa coluna mista de aço e betão e faz-se a avaliação da evolução das tensões nos dois materiais.

5.2 Conclusões finais

Tendo como referência as observações feitas anteriormente, as conclusões mais relevantes a retirar do presente trabalho podem ser assim sumariadas:

- A função de relaxação pode ser aproximada por uma expansão de Dirichlet

de Maxwell que corresponde à solução do modelo generalizado de Maxwell. Interpretando fisicamente o modelo generalizado de Maxwell, a resposta instantânea é resultado da contribuição da mola isolada em conjunto com as molas dos elementos de Maxwell em paralelo e a resposta a longo prazo do modelo é resultado apenas da contribuição de uma mola isolada. O processo de relaxação resulta da perda de tensão nos elementos de Maxwell através da transferência de deformações das suas molas para os amortecedores. O processo de fluência resulta do aumento de deformação nos elementos de Maxwell através transferência de deformações das suas molas para os amortecedores e consequente acomodação da tensão inicial pela mola isolada.

- A função de fluência pode ser aproximada por uma expansão de Dirichlet de Kelvin que corresponde à solução do modelo generalizado de Kelvin. Interpretando fisicamente o modelo de generalizado de Kelvin, a resposta instantânea é resultado da contribuição da mola isolada e a resposta a longo prazo é resultado da contribuição da mola isolada em conjunto com as molas dos elementos de Kelvin em série. O processo de fluência resulta do aumento das deformações dos elementos de Kelvin com tensão. O processo de relaxação resulta da perda de tensão providenciada inicialmente pela mola isolada através da transferência de deformação entre a mesma e os elementos de Kelvin em série, até ao equilíbrio.
- O cálculo da relaxação através do algoritmo incremental do modelo generalizado Maxwell é exato (no contexto das hipóteses simplificativas subjacentes) enquanto que o cálculo da fluência é aproximado. Contudo, perante um histórico de deformações impostas arbitrário, o algoritmo deixa de ser exato devido ao facto de assumir que a variação da deformação é constante em cada um dos intervalos de tempo. Por esse mesmo motivo o cálculo da fluência é aproximado.
- Inversamente, o cálculo da fluência através do algoritmo incremental do modelo generalizado de Kelvin é exato (no contexto das hipóteses simplificativas subjacentes) enquanto que o cálculo da relaxação é aproximado. Neste caso, o algoritmo foi obtido com o pressuposto de que a variação da tensão ao longo de todos os intervalos de tempo é constante, motivo pelo qual, perante um histórico de tensões o cálculo da fluência é aproximado.
- Para se usar o modelo generalizado de Maxwell é necessário converter a curva de fluência regulamentar numa curva de relaxação. Este processo foi efetuado utilizando o método de Euler. O ajuste da expansão de Dirichlet de Maxwell à curva de relaxação regulamentar com o método dos mínimos quadrados mostrou ser suficiente com uma expansão de sete termos e dez pontos da função de relaxação, espaçados de forma constante na escala logarítmica.
- O ajuste da expansão de Dirichlet de Kelvin à curva de fluência regulamentar com o método dos mínimos quadrados mostrou ser suficiente com uma

expansão com seis termos e dez pontos da função de fluência espaçados de forma constante na escala logarítmica.

- O ajuste das expansões de Dirichlet às curvas regulamentares é tanto melhor quanto mais termos das expansões forem utilizados e mais pontos das funções regulamentares forem adotados, porém tal opção resultará num processo de cálculo mais moroso.
- O algoritmo para o cálculo de estruturas mistas é obtido substituindo os algoritmos das modelações de Maxwell ou de Kelvin na equação do PTV. O caso mais simples é o caso de uma coluna mista pois as tensões são constantes em toda a secção.
- O efeito da fluência numa coluna mista com aderência perfeita entre os materiais resulta numa redistribuição de tensão entre o betão e o aço. Em particular, parte da carga é transferida do betão para o aço. No caso da relaxação não há redistribuição de tensão entre os dois materiais, mas existe relaxação da tensão no betão, o aço por sua vez mantém a tensão resultante da deformação inicial.

5.3 Sugestões para desenvolvimentos futuros

A concluir, apresentam-se algumas sugestões tendo em vista desenvolvimentos futuros da presente dissertação:

- No âmbito da modelação da viscoelasticidade no betão sugere-se o estudo das várias metodologias algébricas existentes no contexto da análise de estruturas mistas, tais como o AEMM (*age-adjusted effective modulus method*) e MS (*mean stress method*), a fim de comparar com o método incremental apresentado no presente trabalho.
- No âmbito do cálculo estrutural, sugere-se a apresentação e estudo da metodologia de cálculo da fluência e relaxação em vigas, assim como o desenvolvimento de um elemento finito para permitir efetuar estudos sobre estes fenómenos.

Referências bibliográficas

- [1] ACI Committee 209. Prediction of creep, shrinkage and temperature effects in concrete structures. In *Designing for effects of creep, shrinkage and temperature in concrete structures*, volume ACI SP27-3, pages 51–93, Detroit, MI, 1992.
- [2] S. Al-Deen, G. Ranzi, and Z. Vrcelj. Full-scale long-term and ultimate experiments of simply-supported composite beams with steel deck. *Journal of Construction Steel Research*, 67:1658–76, 2011.
- [3] S. Al-Deen, G. Ranzi, and Z. Vrcelj. Full-scale long-term experiments of simply supported composite beams with solid slabs. *Journal of Construction Steel Research*, 67:308–21, 2011.
- [4] S. Al-Deen, G. Ranzi, and Z. Vrcelj. Long-term experiments on composite beams and connections. *Magazine of Concrete Research*, 64(9):849–61, 2012.
- [5] I. Alsamsam. *Serviceability criteria for composite floor systems*. PhD thesis, The University of Minnesota, 1991.
- [6] I. Alsamsam. Shrinkage measurements in composite beam slabs. In *Proceedings of Non-destructive Testing of Concrete Elements and Structures*, pages 215–25, 1992.
- [7] C. Amadio and M. Fragiaco. Simplified approach to evaluate creep and shrinkage effects in steel-concrete composite beams. *Journal of Structural Engineering*, 123(9):1153–62, 1997.
- [8] C. Amadio, M. Fragiaco, and L. Macorini. Evaluation of the deflection of steel-concrete composite beams at serviceability. *Journal of Constructional Steel Research*, 73:95–104, 2012.
- [9] M. Arockiasamy and M. Sivakumar. Time-dependent behavior of continuous composite integral abutment bridges. *Practice Periodical on Structural Design and Construction*, 10(3):161–70, 2005.
- [10] ZP. Bazant. Prediction of concrete creep effects using age-adjusted effective modulus method. *Journal of the American Concrete Institute*, 69(4):212–7, 1972.

- [11] ZP. Bazant and S. Baweja. Creep and shrinkage prediction model for analysis and design of concrete structures: model b3. In A. Al-Manaseer, editor, *Proceedings of Adam Neville Symposium on Creep and Shrinkage-Structural Design Effects*, pages 1–83ACI SP–194. Farmington Hills, MI: American Concrete Institute, 2000.
- [12] MA. Bradford. Shrinkage behaviour of steel-concrete composite beams. *American Concrete Institute Structural Journal*, 94(6):625–32, 1997.
- [13] MA. Bradford. Generic modelling of composite steelconcrete slabs subjected to shrinkage, creep and initial thermal strains including partial interaction. *Engineering Structures*, 32:1459–65, 2010.
- [14] MA. Bradford and RI. Gilbert. Non-linear behaviour of composite beams at service loads. *Struct Eng*, 67(14):263–8, 1989.
- [15] MA. Bradford and RI. Gilbert. Time-dependent analysis and design of composite columns. *J Struct Eng ASCE*, 116(12):3338–57, 1990.
- [16] MA. Bradford and RI. Gilbert. Experiments on composite beams at service loads. *Civ Eng Trans, Inst Eng*, CE33(4):284–91, 1991.
- [17] MA. Bradford and RI. Gilbert. Time-dependent behaviour of simply supported steel-concrete composite beams. *Proc Inst Civ Eng Struct Build*, 94:315–22, 1991.
- [18] MA. Bradford and RI. Gilbert. Composite beams with partial interaction under sustained loads. *J Struct Eng ASCE*, 118(7):1871–83, 1992.
- [19] MA. Bradford and RI. Gilbert. Time-dependent stresses and deformations in propped composite beams. *Proc Inst Civ Eng Struct Build*, 94:315–22, 1992.
- [20] MA. Bradford, H. Vu Manh, and RI. Gilbert. Numerical analysis of continuous composite beams under service loading. *Adv Struct Eng*, 5(1):1–12, 2002.
- [21] RQ. Bridge. Composite columns under sustained load. *J Struct Div Proc Am Soc Civ Eng*, 105(ST3):563–76, 1979.
- [22] S. Chaudhary, U. Pendharkar, and AK. Nagpal. Hybrid procedure for cracking and time-dependent effects in composite frames at service loads. *J Struct Eng ASCE*, 133(2):166–70, 2007.
- [23] S. Chaudhary, U. Pendharkar, and AK. Nagpal. Control of creep and shrinkage effects in steel concrete composite bridges with precast decks. *J Bridge Struct Eng ASCE*, 14(5):336–45, 2009.
- [24] T. Chicoine, B. Massicotte, and R. Tremblay. Long-term behavior and strength of partially encased composite columns made with built-up steel shapes. *J Struct Eng ASCE*, 129(2):141–50, 2003.
- [25] L. Dezi, C. Ianni, and AM. Tarantino. Simplified creep analysis of composite beams with flexible connectors. *J Struct Eng ASCE*, 119(5):1484–97, 1993.

- [26] L. Dezi, G. Leoni, and AM. Tarantino. Algebraic methods for creep analysis of continuous composite beams. *J Struct Eng ASCE*, 122(4):423–30, 1996.
- [27] L. Dezi, G. Leoni, and AM. Tarantino. Creep and shrinkage analysis of composite beams. *Prog Struct Eng Mater*, 1(2):170–7, 1998.
- [28] L. Dezi and AM. Tarantino. Creep in composite continuous beams - i: theoretical treatment. *J Struct Eng ASCE*, 119(7):2095–111, 1993.
- [29] L. Dezi and AM. Tarantino. Creep in composite continuous beams - ii: parametric study. *J Struct Eng ASCE*, 119(7):2112–33, 1993.
- [30] L. Diniz and ST. Pinho. *Mecânica não Linear*. Departamento de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Novembro 2005.
- [31] CEB (Comité Euro-International du Béton). *CEB design manual on structural effects of time-dependent behaviour of concrete*. Georgi Publishing, 1984.
- [32] EN1992-1-1. Eurocode 2: Design of concrete structures - part 1-1: General rules and rules for buildings. Technical report, European Committee for Standardization, 2004.
- [33] EN1994-1-1. Eurocode 4: Design of composite steel and concrete structures - part 1-1: General rules and rules for buildings. Technical report, European Committee for Standardization, 2004.
- [34] RE. Erkmen and MA. Bradford. Nonlinear quasi-viscoelastic behavior of composite beams curved in-plan. *J Eng Mech*, 137(4):238–47, 2011.
- [35] C. Faella, E. Martinelli, and E. Nigro. Steel and concrete composite beams with flexible shear connection: exact analytical expression of the stiffness matrix and applications. *Comput Struct*, 80:1001–9, 2002.
- [36] J. Fan, X. Nie, Q. Li, and Q. Li. Long-term behavior of composite beams under positive and negative bending. i: experimental study. *J Struct Eng ASCE*, 136(7):849–57, 2010.
- [37] J. Fan, X. Nie, Q. Li, and Q. Li. Long-term behavior of composite beams under positive and negative bending. ii: analytical study. *J Struct Eng ASCE*, 136(7):858–65, 2010.
- [38] M. Fragiaco, C. Amadio, and L. Macorini. Influence of viscous phenomena on steel-concrete composite beams with normal and high performance slab. *Steel Compos Struct*, 2(2):85–98, 2002.
- [39] M. Fragiaco, C. Amadio, and L. Macorini. Finite-element model for collapse and long-term analysis of steel-concrete composite beams. *J Struct Eng ASCE*, 130(3):489–97, 2004.
- [40] F. Gara, G. Ranzi, and G. Leoni. Time analysis of composite beams with partial interaction using available modelling techniques: a comparative study. *J Constr Steel Res*, 62(9):917–30, 2006.

- [41] Y. Geng, G. Ranzi, Y. Wang, and S. Zhang. Time-dependent behaviour of concrete-filled steel tubular columns: analytical and comparative study. *Mag Concr Res*, 64(1):55–69, 2012.
- [42] A. Ghali and R. Favre. *Concrete structures: stresses and deformations*. Chapman and Hall, 1986.
- [43] R.I. Gilbert. Time effects in concrete structures. *Elsevier Science Publishers*, 1988.
- [44] R.I. Gilbert and M.A. Bradford. Time-dependent behaviour of continuous composite beams at service loads. *J Struct Eng ASCE*, 121(2):319–27, 1995.
- [45] R.I. Gilbert, M.A. Bradford, A. Gholamhoseini, and Z.T. Chang. The effects of shrinkage on the long-term deformation of composite concrete slabs. In *Proceedings of CONCRETE 2011 - Building a Sustainable Future*, Perth (Australia), 12-14 October 2011.
- [46] R.I. Gilbert and G. Ranzi. Time-dependent behaviour of concrete structures. *Spon Press*, 2011.
- [47] F. Giussani and F. Mola. Service-stage analysis of curved composite steel-concrete bridge beams. *J Struct Eng ASCE*, 132(12):1928–39, 2006.
- [48] Y.M. Haddad. *Viscoelasticity of Engineering Materials*. Chapman and Hall, 1995.
- [49] L.H. Han, Z. Tao, and W. Liu. Effects of sustained load on concrete-filled hollow structural steel columns. *J Struct Eng ASCE*, 130(9):1392–404, 2004.
- [50] L.H. Han and Y.F. Yang. Analysis of thin-walled steel rhs columns filled with concrete under long-term sustained load. *Thin-Walled Struct*, 41:849–70, 2003.
- [51] L.H. Han, X.L. Zhao, and Z. Tao. Tests and mechanics model of concrete-filled shs stub columns, columns and beam-columns. *Steel and Composite Structures-An International Journal*, 1(1):51–74, 2001a.
- [52] L.H. Ichinose, E. Watanabe, and H. Nakai. An experimental study on creep of concrete filled steel pipes. *J Constr Steel Res*, 57:453–66, 2001.
- [53] R.P. Johnson. Shrinkage-induced curvature in composite beams with a cracked concrete flange. *Struct Eng*, 65(4):72–7, 1987.
- [54] R.P. Johnson and G. Hanswille. Analyses for creep of continuous steel and composite bridge beams, according to ec4: part 2. *Struct Eng*, 76(15):294–8, 1998.
- [55] B. Jurkiewicz, S. Buzon, and J.G. Sieffert. Incremental viscoelastic analysis of composite beams with partial interaction. *Comput Struct*, 83:1780–91, 2005.
- [56] H.G. Kwak and Y.L. Seo. Time-dependent behaviour of composite beams with flexible connectors. *Comput Methods Appl Mech Eng*, 191:3751–72, 2002.

- [57] SH. Kwon, TH. Kim, YY. Kim, and JK. Kim. Long-term behaviour of square concrete-filled steel tubular columns under axial service loads. *Mag Concr Res*, 59(1):53–68, 2007.
- [58] SH. Kwon, YY. Kim, and JK. Kim. Long-term behaviour under axial service loads of circular columns made from concrete filled steel tubes. *Mag Concr Res*, 57(2):87–99, 2005.
- [59] R. Lawther and RI. Gilbert. A rate-of-creep analysis of composite steel-concrete cross-sections. *Struct Eng*, 65(11):208–13, 1990.
- [60] R. Lawther and RI. Gilbert. Deflection analysis of composite structures using the rate-of-creep method. *Struct Eng*, 70(12):220–3, 1992.
- [61] R. Le Roy, F. De Larrard, and G. Pons. The afrem code type model for creep and shrinkage of high-performance concrete. In *4th international symposium on utilization of high-strength/high-performance concrete*, pages 387–96, Paris, 1996.
- [62] Z. Liu, F. Li, and WMK. Roddis. Analytic model of long-span self-shored arch bridge. *J Bridge Eng ASCE*, 7(1):14–21, 2002.
- [63] SPC. Marques and GJ Creus. *Computational Vicoelasticity*. Springer Briefs in Applied Sciences and Technology - Computational Mechanics, 2012.
- [64] MATLAB. *version 8.0.0.783 (R2012b)*. The MathWorks Inc., Natick, Massachusetts, 2012.
- [65] F. Minardi and G. Spada. Creep, relaxation and viscosity properties for basic fractional models in rheology. *The European Physical Journal*, 93:133–160, 2011.
- [66] O. Mirza and B. Uy. Finite element model for long-term behaviour of composite steel-concrete push tests. *Steel Compos Struct*, 10:439–61, 2010.
- [67] CJ. Montgomery, GL. Kulak, and G. Shwartsburd. Deflections of a composite floor system. *Can J Civ Eng*, 10:192–204, 1983.
- [68] S. Morino, J. Kawaguchi, and SS. Cao. Creep behavior of concrete-filled steel tubular members. In *Proceedings of the Engineering Foundation Conference - Composite Construction in Steel and Concrete III*, pages 514–25, Irsee (Germany), 1996.
- [69] W. Naguib and A. Mirmiran. Creep modelling for concrete-filled steel tubes. *J Constr Steel Res*, 59:1327–44, 2003.
- [70] H. Nakai, A. Kurita, and LH. Ichinose. An experimental study on creep and concrete filled steel pipes. *Proceedings of the 3rd International Conference on Steel-Concrete Composite Structures, Fukuoka (Japan)*, pages 55–60, 1991.
- [71] QH. Nguyen, M. Hjiij, and JM. Aribert. A space-exact beam element for time-dependent analysis of composite members with discrete shear connection. *J Constr Steel Res*, 66:1330–8, 2010.

- [72] QH. Nguyen, M. Hjiij, and B. Uy. Time-dependent analysis of composite beams with continuous shear connection based on a space-exact stiffness matrix. *Eng Struct*, 32:2902–11, 2010.
- [73] R. Póvoas. *Modelos Não-Lineares de Análise e Dimensionamento*. PhD thesis, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 1991.
- [74] G. Ranzi. *Partial interaction analysis of composite beams using the direct stiffness method*. PhD thesis, The University of New South Wales, 2003.
- [75] G. Ranzi. Short- and long-term analyses of composite beams with partial shear interaction stiffened by a longitudinal plate. *Steel Compos Struct*, 6(3):237–55, 2006.
- [76] G. Ranzi and MA. Bradford. Analytical solutions for the time dependent behaviour of composite beams with partial interaction. *Int J Solids Struct*, 43(13):3770–93, 2006.
- [77] G. Ranzi and MA. Bradford. Analysis of composite beams with partial interaction using the direct stiffness approach for time effects. *Int J Numer Methods Eng*, 78(5):564–86, 2009.
- [78] G. Ranzi, G. Leoni, and R. Zandonini. State of the art on the time-dependent behaviour of composite steel-concrete structures. *Journal of Constructional Steel Research*, 2013.
- [79] G. Ranzi and Z. Vrcelj. Closed form solutions for the long-term analysis of composite steel-concrete members subjected to non-uniform shrinkage distributions. In *Proceedings of the 5th International Conference on Advances in Steel Structures (ICASS '09)*, Hong Kong, 16-18 December 2009.
- [80] F. Roll. Effects of differential shrinkage and creep on a composite steel-concrete structure. *ACI Spec Publ*, SP-27(8):263–8, 1971.
- [81] D. Roylance. *Engineering Viscoelasticity*. Department of Materials Science and Engineering, Massachusetts Institute of Technology - Cambridge University, October 2001.
- [82] MA. Sakr and SSS. Sakla. Long-term deflection of cracked composite beams with nonlinear partial shear interaction: I - finite element modelling. *J Constr Steel Res*, 64:1446–55, 2008.
- [83] X. Shao, J. Peng, L. Li, B. Yan, and J. Hu. Time-dependent behavior of concrete-filled steel tubular arch bridge. *J Bridge Eng ASCE*, 15(1):98–107, 2010.
- [84] S. Shayan, S. Al-Deen, G. Ranzi, and Z. Vrcelj. Long-term behaviour of composite concrete slabs: an experimental study. In *Proceedings of the 4th International Conference on Steel and Composite Structures (ICSCS '10)*, Sydney, 21-23 July 2010.

- [85] KM. Shrestha, BC. Chen, and YF. Chen. State of the art of creep of concrete filled steel tubular arches. *KSCE J Civ Eng*, 15(1):145–51, 2011.
- [86] LJ. Sluys. *Computational Methods in Non-linear Solid Mechanics*. Faculty of Civil Engineering and Geosciences, tudelft edition, 1999.
- [87] AM. Tarantino and L. Dezi. Creep effects in composite beams with flexible shear connectors. *J Struct Eng ASCE*, 118(8):2063–81, 1992.
- [88] M. Tehami and KE. Ramdane. Creep behaviour modelling of a composite steel-concrete section. *J Constr Steel Res*, 65:1029–33, 2009.
- [89] T. Telford. Ceb-fip model code 1990, 1993.
- [90] PJ. Terrey, MA. Bradford, and RI. Gilbert. Creep and shrinkage in concrete-filled steel tubes. *Proceedings of 6th International Symposium on Tubular Structures*, pages 293–8, 1994.
- [91] The University of Auckland - Faculty of Engineering. *Solid Mechanics*. <http://homepages.engineering.auckland.ac.nz/pkel015/SolidMechanicsBooks/>.
- [92] B. Uy. Static long-term effects in short concrete-filled steel box columns under sustained loading. *ACI Struct J*, pages 96–104, 2001.
- [93] B. Uy and S. Das. Time effects in concrete-filled steel box columns in tall buildings. *Struct Des Tall Build*, 6:1–22, 1997.
- [94] F. Virtuoso and R. Vieira. Time dependent behaviour of continuous composite beams with flexible connection. *J Constr Steel Res*, 60(3-5):451–63, 2004.
- [95] Y. Wang, Y. Geng, G. Ranzi, and S. Zhang. Time-dependent behaviour of expansive concrete-filled steel tubular columns. *J Constr Steel Res*, 67:471–83, 2011.
- [96] YF. Wang, B. Han, JS. Du, and KW. Liu. Creep analysis of concrete filled steel tube arch bridges. *Struct Eng Mech*, 27(6):639–50, 2007.
- [97] YF. Wang, B. Han, and DJ. Zhang. Advances in creep of concrete filled steel tube members and structures. In *Proceedings of the 8th International Conference on Creep*, pages 595–600, Ise-Shima (Japan), 30 September-2 October 2009.
- [98] HD. Wright, JL. Vitek, and SN. Rakib. Long-term creep and shrinkage in composite beams with partial connection. *Proc Inst Civ Eng Struct Build*, 94:187–95, 1992.
- [99] W. Zuk. Thermal and shrinkage stresses in composite beams. *ACI J*, Title No. 58-16:327–40, 1961.

Apêndice A

Transformadas de Laplace

Definições básicas:

$$\mathcal{L}f(t) = \bar{f}(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (\text{A.1})$$

Propriedades fundamentais:

$$\mathcal{L}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = c_1 \bar{f}_1(s) + c_2 \bar{f}_2(s) \quad (\text{A.2})$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial f}{\partial t}\right] = s\bar{f}(s) - f(0^-) \quad (\text{A.3})$$

Alguns pares de transformadas úteis:

$f(t)$	$\bar{f}(s)$
$H(t)$	$1/s$
t^n	$n!/s^{n+1}$
e^{-at}	$1/(s+a)$
$\frac{1}{a}(1 - e^{-at})$	$1/s(s+a)$
$\frac{t}{a} - \frac{1}{a^2}(1 - e^{-at})$	$1/s^2(s+a)$

(A.4)

Função Heaviside ou função de passo unitário é definida como

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

Apêndice B

Expressões básicas para a determinação do coeficiente de fluência segundo o EC2

O coeficiente de fluência, $\varphi(t, t_0)$, poderá ser calculado a partir de:

$$\varphi(t, t_0) = \varphi_0 \cdot \beta_c(t, t_0) \quad (\text{B.1})$$

em que:

$$\varphi_0 = \varphi_{RH} \cdot \beta(f_{cm}) \cdot \beta(t_0) \quad (\text{B.2})$$

φ_{RH} fator que tem em conta a influência da humidade relativa no coeficiente de fluência:

$$\varphi_{RH} = 1 + \frac{1 - RH/100}{0,1 \cdot \sqrt[3]{h_0}} \quad \text{para } f_{cm} \leq 35 \text{ MPa} \quad (\text{B.3a})$$

$$\varphi_{RH} = \left[1 + \frac{1 - RH/100}{0,1 \cdot \sqrt[3]{h_0}} \cdot \alpha_1 \right] \cdot \alpha_2 \quad \text{para } f_{cm} > 35 \text{ MPa} \quad (\text{B.3b})$$

RH humidade relativa do meio ambiente, em %;

$\beta(f_{cm})$ fator que tem em conta a resistência do betão no coeficiente de fluência convencional:

$$\beta(f_{cm}) = \frac{16,8}{\sqrt{f_{cm}}} \quad (\text{B.4})$$

f_{cm} valor médio da tensão de rotura à compressão, em MPa, aos 28 dias de idade;

$\beta(t_0)$ fator que tem em conta a influência da idade do betão à data do carregamento no coeficiente de fluência:

$$\beta(t_0) = \frac{1}{(0,1 + t_0^{0,20})} \quad (\text{B.5})$$

h_0 espessura equivalente do elemento, em mm, em que:

$$h_0 = \frac{2A_c}{u} \quad (\text{B.6})$$

A_c área da secção transversal;

u parte do perímetro do elemento em contacto com o ambiente;

$\beta_c(t, t_0)$ coeficiente que traduz a evolução da fluência no tempo, após carregamento, e que poderá ser estimado pela seguinte expressão:

$$\beta_c(t, t_0) = \left[\frac{(t - t_0)}{(\beta_H + t - t_0)} \right]^{0,3} \quad (\text{B.7})$$

t idade do betão, em dias, na data considerada;

t_0 idade do betão, em dias, à data do carregamento;

$t - t_0$ duração não corrigida do carregamento, em dias;

β_H coeficiente que depende da humidade relativa (RH em %) e da espessura equivalente do elemento (h_0 em mm). Poderá ser estimado a partir de:

$$\beta_H = 1,5 \left[1 + (0,012RH)^{18} h_0 \right] + 250 \leq 1500 \quad \text{para } f_{cm} \leq 35 \quad (\text{B.8a})$$

$$\beta_H = 1,5 \left[1 + (0,012RH)^{18} h_0 + 250\alpha_3 \right] \leq 1500\alpha_3 \quad \text{para } f_{cm} \geq 35 \quad (\text{B.8b})$$

$\alpha_{1/2/3}$ coeficientes que têm em conta influência da resistência do betão:

$$\alpha_1 = \left[\frac{35}{f_{cm}} \right]^{0,7} \quad \alpha_2 = \left[\frac{35}{f_{cm}} \right]^{0,2} \quad \alpha_3 = \left[\frac{35}{f_{cm}} \right]^{0,5} \quad (\text{B.8c})$$